Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Corso di Topografia e Idrografia

Lezione 6

Approfondimenti sul trattamento delle misure in topografia

Claudio Parente

Abbiamo visto come la media e la varianza di una variabile casuale monodimensionale siano in grado di rappresentarne il baricentro e la dispersione. In topografia però raramente si misura direttamente la quantità che si vuole determinare: ad esempio si misurano angoli azimutali, zenitali, distanze e dislivelli per determinare coordinate ecc..

Occorre allora poter ricavare la media e la varianza della variabile casuale funzione di altre variabili casuali, ovvero derivare le caratteristiche di aleatorietà della grandezza misurata indirettamente, una volta noti i parametri caratteristici delle quantità misurate direttamente.

Consideriamo la funzione lineare:

$$f(X, Y, Z, \ldots) = aX + bY + cZ + \ldots + l \tag{3.4}$$

in cui le grandezze X, Y, Z, ... siano indipendenti tra loro e direttamente misurabili.

Siano X_1, Y_1, Z_1, ... ; X_2, Y_2, Z_2, ... ; .....; X_n, Y_n, Z_n, ... serie di valori delle grandezze X, Y, Z, ... ovvero si estragga un campione di n valori di ciascuna variabile.

Potremo scrivere, per ognuna delle serie di valori, le relazioni:

$$\begin{aligned} &f_1(X_1, Y_1, Z_1, \ldots) = aX_1 + bY_1 + cZ_1 + \ldots + l \\ &f_2(X_2, Y_2, Z_2, \ldots) = aX_2 + bY_2 + cZ_2 + \ldots + l \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(X_n, Y_n, Z_n, \ldots) = aX_n + bY_n + cZ_n + \ldots + l \end{aligned} \tag{3.5}$$

sottraendo ciascuna di queste dalla f si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&f - f_1 = a(X - X_1) + b(Y - Y_1) + c(Z - Z_1) + \dots \\
&f - f_2 = a(X - X_2) + b(Y - Y_2) + c(Z - Z_2) + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&f - f_n = a(X - X_n) + b(Y - Y_n) + c(Z - Z_n) + \dots
\end{aligned}
$$

Ponendo

$$f - f_1 = \varepsilon_1, \qquad X - X_1 = x_1, \qquad Y - Y_1 = y_1, \qquad Z - Z_1 = z_1$$

$$f - f_2 = \varepsilon_2, \qquad X - X_2 = x_2 \qquad \dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= ax_1 + by_1 + cz_1 + \dots \\
\varepsilon_2 &= ax_2 + by_2 + cz_2 + \dots \\
&\dots\dots\dots \\
\varepsilon_n &= ax_n + by_n + cz_n + \dots
\end{aligned}
$$

Quadrandole si ha:

$$\varepsilon_1^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2 + \dots + 2abx_1y_1 + 2acx_1z_1 + 2bcy_1z_1 + \dots$$
$$\varepsilon_2^2 = a^2x_2^2 + b^2y_2^2 + c^2z_2^2 + \dots + 2abx_2y_2 + 2acx_2z_2 + 2bcy_2z_2 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varepsilon_n^2 = a^2x_n^2 + b^2y_n^2 + c^2z_n^2 + \dots + 2abx_ny_n + 2acx_nz_n + 2bcy_nz_n + \dots$$

Sommando membro a membro:

$$\sum_{1}^{n}{}_{i}\varepsilon_{1}^{2} = a^{2}\sum_{1}^{n}x_{i}^{2} + b^{2}\sum_{1}^{n}y_{i}^{2} + c^{2}\sum_{1}^{n}z_{i}^{2} + \ldots + 2ab\sum_{1}^{n}x_{i}y_{i} + \ldots$$

Se gli errori da cui sono affette le misure sono solo accidentali, questi avranno identica probabilità di essere positivi o negativi. Quindi, al crescere del campione di n elementi, la loro frequenza tende a livellarsi; perciò le sommatorie

$$2ab\sum_{1}^{n}x_{i}y_{i}\ ,\ldots \tag{3.12}$$

tendono a zero.

Quindi, per n grande, possiamo scrivere:

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\varepsilon_{1}^{2} = a^{2}\sum_{1}^{n} x_{i}^{2} + b^{2}\sum_{1}^{n} y_{i}^{2} + c^{2}\sum_{1}^{n} z_{i}^{2} + \ldots.$$

da cui, dividendo ciascun termine per n,

$$\frac{\sum_{1}^{n} {}_{i}\varepsilon_{1}^{2}}{n} = a^{2}\frac{\sum_{1}^{n} x_{i}^{2}}{n} + b^{2}\frac{\sum_{1}^{n} y_{i}^{2}}{n} + c^{2}\frac{\sum_{1}^{n} z_{i}^{2}}{n} + \ldots.$$

Indicando con σ_f , σ_x , σ_y , σ_z , ... rispettivamente gli errori medi di una determinazione semplice delle grandezze f , X, Y, Z, ... la relazione diventa:

$$\sigma_f^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + c^2\sigma_z^2 + ... \qquad (3.15)$$

Se la funzione *non è lineare* ma la si può linearizzare sviluppandola in serie di Taylor arrestata al 1° ordine attorno a valori osservati X_i, Y_i, Z_i, ... delle grandezze indipendenti, l'espressione della varianza σ^2 della funzione f è analoga a quella sopra scritta, ove si pongano, al posto dei coefficienti a, b, c, i quadrati delle derivate delle derivate parziali di f rispetto alle grandezze osservabili X, Y, ...

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\circ}^{2}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\circ}^{2}, ... \tag{3.16}$$

calcolate per un valore approssimato.

Quanto ora detto per le funzioni non lineari ha la seguente spiegazione. Si abbia la funzione f (X, Y, ...) in cui X, Y, ... rappresentano grandezze indipendenti e direttamente misurabili. Eseguendo una serie di misure si otterranno per X, Y, ... dei valori osservati X_1, Y_1, .. ; X_2, Y_2, .. che saranno affetti da errori x_1, y_1, ... ; x_2, y_2, ...

Avremo cioè, per esempio

$$X = X_1 + x_1 , \qquad Y = Y_1 + y_1 , \qquad .... \tag{3.17}$$

$$f(X, Y, ...) = f(X_1 + x_1 , Y_1 + y_1 , ...) \tag{3.18}$$

e, di conseguenza, al 1° ordine dello sviluppo in serie di Taylor

$$f(X, Y, ...) = f(X_1, Y_1, ...) + \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_1 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_1 \cdot y_1 + ... \tag{3.19}$$

Considerando ora le altre osservabili X_2, Y_2, ..., X_k, Y_k, ..., X_n, Y_n, ... si avranno altrettante relazioni analoghe alla precedente nelle quali i coefficienti a_2, b_2, ..., a_k, b_k, ..., a_n, b_n, ..., rappresentano le derivate di f rispetto a X, Y, ..., coi valori X_1, Y_1, ..., X_2, Y_2, ..., X_n, Y_n, ...

E' evidente che data la concentrazione delle variabili osservate si potranno assumere per i coefficienti a, b, c, ... valori unici ottenuti sostituendo nelle derivate

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right),\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right),\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right),\ \ldots.$$

valori prossimi di X, Y, Z, ...

Per esempio quelli generici X_i, Y_i, Z_i, ... di una serie di osservazioni. Si possono quindi scrivere le relazioni

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= ax_1 + by_1 + cz_1 + \ldots. \\
\varepsilon_2 &= ax_2 + by_2 + cz_2 + \ldots. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n &= ax_n + by_n + cz_n + \ldots.
\end{aligned} \qquad (3.22)$$

che sono perfettamente analoghe a quelle trovate per le funzioni lineari.

Riprendiamo l'espressione generale vista prima nel caso indipendente lineare

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\varepsilon_1^2 = a^2\sum_{1}^{n} x_i^2 + b^2\sum_{1}^{n} y_i^2 + c^2\sum_{1}^{n} z_i^2 + \ldots + 2ab\sum_{1}^{n} x_i y_i + \ldots$$

o linearizzata, generalmente intorno al valore medio o ad una osservabile

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\varepsilon_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o^2 \cdot \sum_{1}^{n} x_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o^2 \cdot \sum_{1}^{n} y_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o^2 \cdot \sum_{1}^{n} z_i^2 + \ \ldots$$
$$\ldots \ + 2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \cdot \sum_{1}^{n} x_i y_i + \ldots$$

dove, per i motivi suddetti, il doppio prodotto è, per n grande, tendente a zero

Supponiamo invece che le grandezze X, Y, Z, ... non siano tra loro indipendenti e valutiamo cosa succede. Si può immediatamente vedere che i termini dei doppi prodotti $\sum x_i y_i$ non tendono a zero al crescere di n perché il comportamento di una variabile (variabile scarto $X-X_i=x_i$, $Y-Y_i=y_i$, ...) dipende dal comportamento dell'altra.

Si può vedere che la $\sum x_i y_i$ altro non è che la sommatoria del prodotto degli scarti e che $\sum_i x_i y_i / n$ altro non è che la *media* del prodotto degli scarti $M(x_i y_i)$.

L'espressione del doppio prodotto risulta, pertanto, nei due casi sopra visti, quando si passa alle varianze:

- $\sigma_f^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + ... + 2abM(xy)$ (caso lineare)

(3.25)

- $\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_m^2 \sigma_y^2 + ... + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_m \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_m M(xy)$ (caso non lineare)

Si può dimostrare che l'espressione $M(xy)$ è equivalente al prodotto delle variazioni standard $\sigma_x \cdot \sigma_y$ per un coefficiente r_{xy}.

Quest'ultimo, detto *coefficiente di correlazione lineare*, misura il grado di dipendenza lineare fra le variabili.

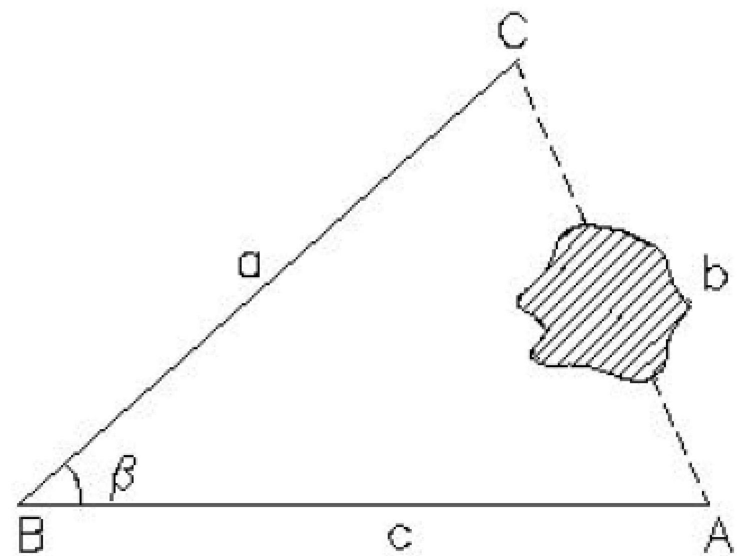
Esso può variare tra -1 e +1.

Si sottolinea, infine, che la espressione $M(xy)$, equivalente a $r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$ si trova quasi sempre o spesso scritta nella forma σ_{xy}.

$$M(xy) = \sigma_{xy} = r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$$

Una applicazione pratica

Del triangolo in figura sono stati misurati due lati e l'angolo compreso



Sia :

$a = 1.000$ m

$c = 1.500$ m

$\beta = 50^g$

$\sigma_d = (3 + 2D\ [Km])\ [mm]$

$\sigma_a = 5$ mm

$\sigma_c = 6$ mm

$$\sigma_\beta = 5^{cc} = 0^g{,}0005 = \left(0{,}0005 \cdot \frac{\pi}{200}\right)_{rad}$$

Determinare:

1. La lunghezza del lato b e la sua varianza
2. La superficie S del triangolo e la sua varianza

- **Calcolo della superficie S :**

$$S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta = 530.330{,}0859 \text{ m}^2$$

- **Calcolo della varianza della superficie S :**

$$\sigma_S{}^2 = \left(\frac{\delta S}{\delta a}\right)^2 * \sigma_a{}^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta c}\right)^2 * \sigma_c{}^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta \beta}\right)^2 * \sigma_\beta{}^2$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial a} \quad \frac{\partial S}{\partial c} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta}\right] = \left[\frac{1}{2} c \cdot \sin\beta \quad \frac{1}{2} a \cdot \sin\beta \quad \frac{1}{2} ac \cdot \cos\beta\right] = [53{,}033 \quad 35{,}355 \quad 530330{,}09]$$

$$\sigma_s^2 = 28{,}8802 \text{ m}^4$$

$$\sigma_S = 5{,}3740 \text{ m}^2$$

$$S = 530.330{,}08 \text{ m}^2 \pm 5{,}37 \text{ m}^2$$

- **Calcolo della lunghezza del lato b :**

Dal teorema di Carnot si ricava b^2 :

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$

b=1.062,3934 m

- **Calcolo della varianza di b :**

$$b=(a^2+c^2-2ac\cos\beta)^{1/2}$$

$$\sigma_b{}^2=\left(\frac{\delta b}{\delta a}\right)^2*\sigma_a{}^2+\left(\frac{\delta b}{\delta c}\right)^2*\sigma_c{}^2+\left(\frac{\delta b}{\delta \beta}\right)^2*\sigma_\beta{}^2$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial b}{\partial a} & \frac{\partial b}{\partial c} & \frac{\partial b}{\partial \beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2a-2c\cdot\cos\beta}{2b} & \frac{2c-2a\cdot\cos\beta}{2b} & \frac{2ac\cdot\sin\beta}{2b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5{,}7098\cdot10^{-2} & 0{,}74632 & 998{,}3686\end{bmatrix}$$

$\sigma_b^2=8{,}1618\cdot10^{-5}\ m^2$

$\sigma_b=9{,}0342\cdot10^{-3}\ m$

$b=1062{,}39\ m \pm 9{,}03\ mm$