



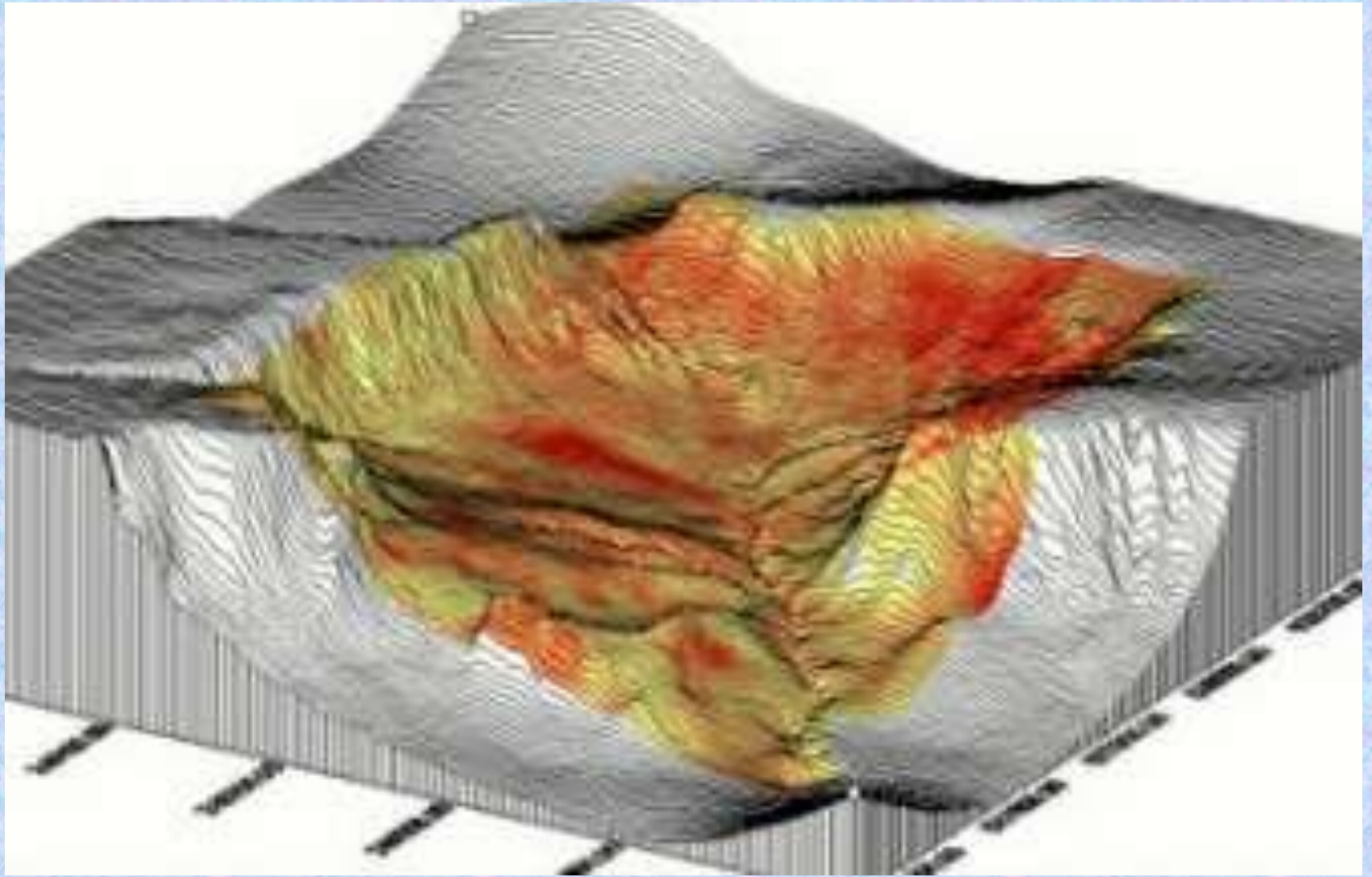
*Università degli Studi di Napoli “Parthenope”  
Dipartimento di Scienze e Tecnologie*

*Corso di Cartografia Numerica e GIS  
Corso di Sistemi Informativi Geografici + Laboratorio GIS*

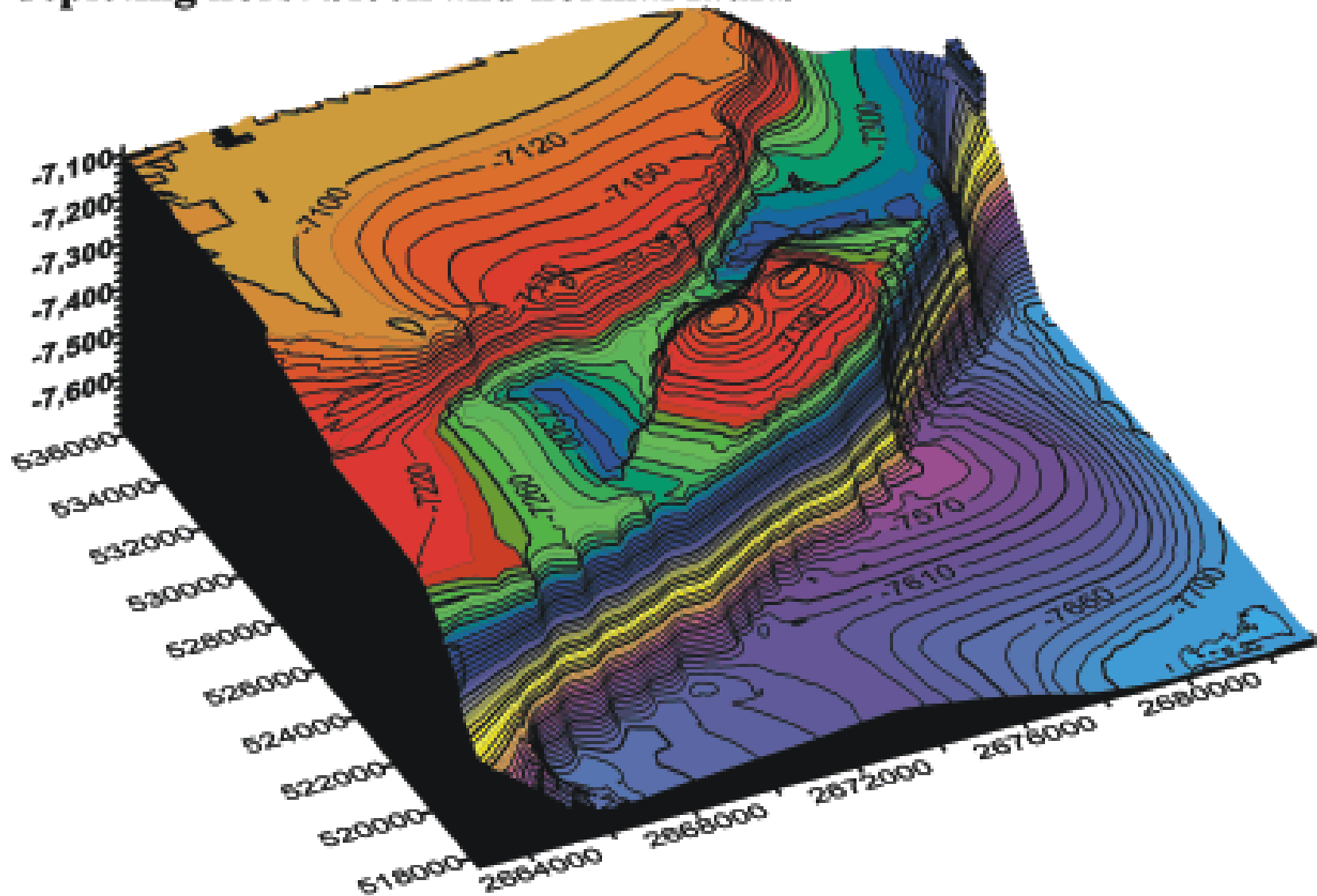
*Lezione 10*

**La rappresentazione della terza dimensione: i modelli  
digitali del terreno**

**La costruzione di TIN  
(Triangular Irregular Network)**



# Wilcox Surface Map depicting horst block and normal faults



# Terminologia ricorrente

- Triangulated Irregular Network (TIN);*
- Digital Elevation Model (DEM);*
- Digital Height Model (DHM);*
- Digital Ground Model (DGM);*
- Digital Terrain Elevation Data (DTED);*
- Grid;*
- Digital terrain Model (DTM).*

# DTM

Si definisce DTM “una rappresentazione statistica di una superficie continua del terreno attraverso un numero elevato di punti noti nelle coordinate  $x,y,z$  relative ad un sistema arbitrario di riferimento”.

*Miller e La Flamme, Massachusetts Institute of Technology (MIT), 1958*

# **Etimologia**

Le diverse espressioni sono spesso utilizzate come sinonimi, ma una differenziazione nelle interpretazioni più rigorose è comunque adottata dagli addetti ai lavori, anzitutto in relazione al significato che hanno i diversi termini in gioco.

# Etimologia

***DTM (Digital Terrain Model)*** è il termine più generale ed indica un qualsiasi modello digitale del terreno, a prescindere dalle sue peculiarità.

Il termine ***TIN (Triangular o Triangulated Irregular Network)*** e ***DEM (Digital Elevation Model)***, quest'ultimo detto più propriamente ***Grid***, indicano le due principali (e differenti) famiglie di DTM. In particolare essi indicano due diversi modi di costruire la struttura dei Modelli Digitali del Terreno.

# DTM, TIN e DEM

Alla base della costruzione del DTM rimane comunque una delle due strutture fondamentali, ovvero o il TIN o il DEM (quest'ultimo detto anche Grid).

Nelle slide seguenti si illustrano le caratteristiche principali, nonché le modalità operative per la realizzazione del TIN. Il grid è oggetto della lezione successiva.

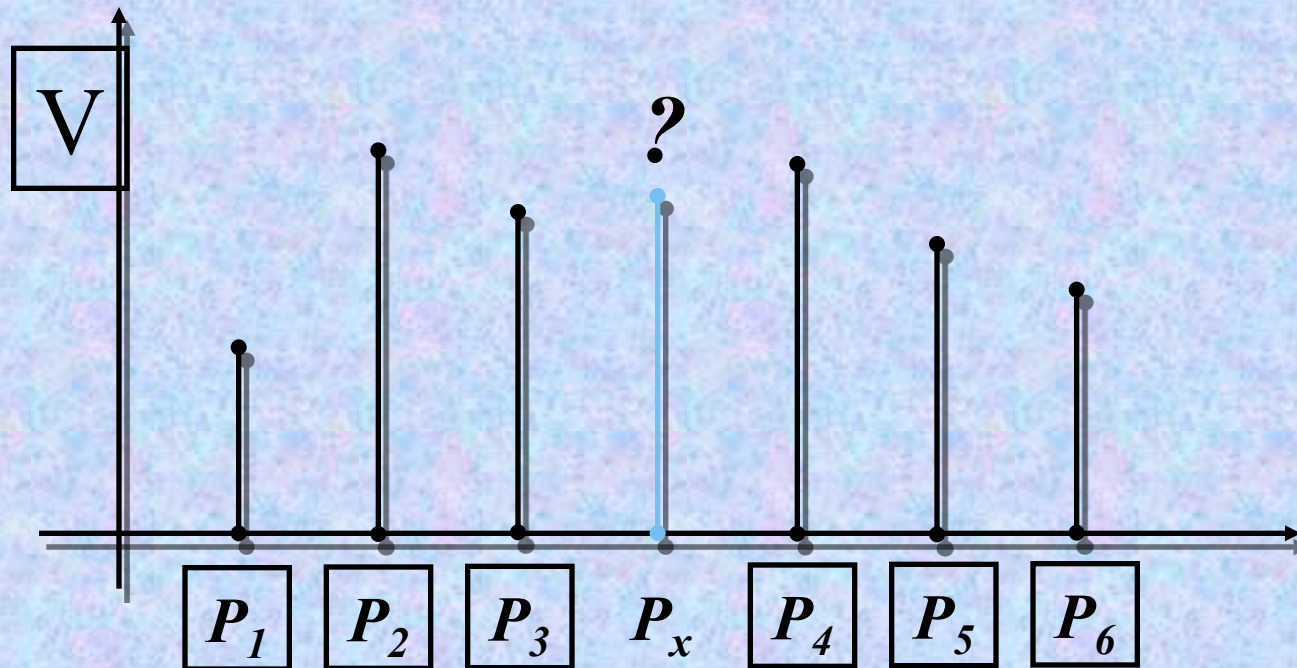
Entrambi i modelli richiedono l'applicazione di algoritmi di interpolazione spaziale.

Definiamo prima l'interpolazione lineare nel piano e poi quella nello spazio.



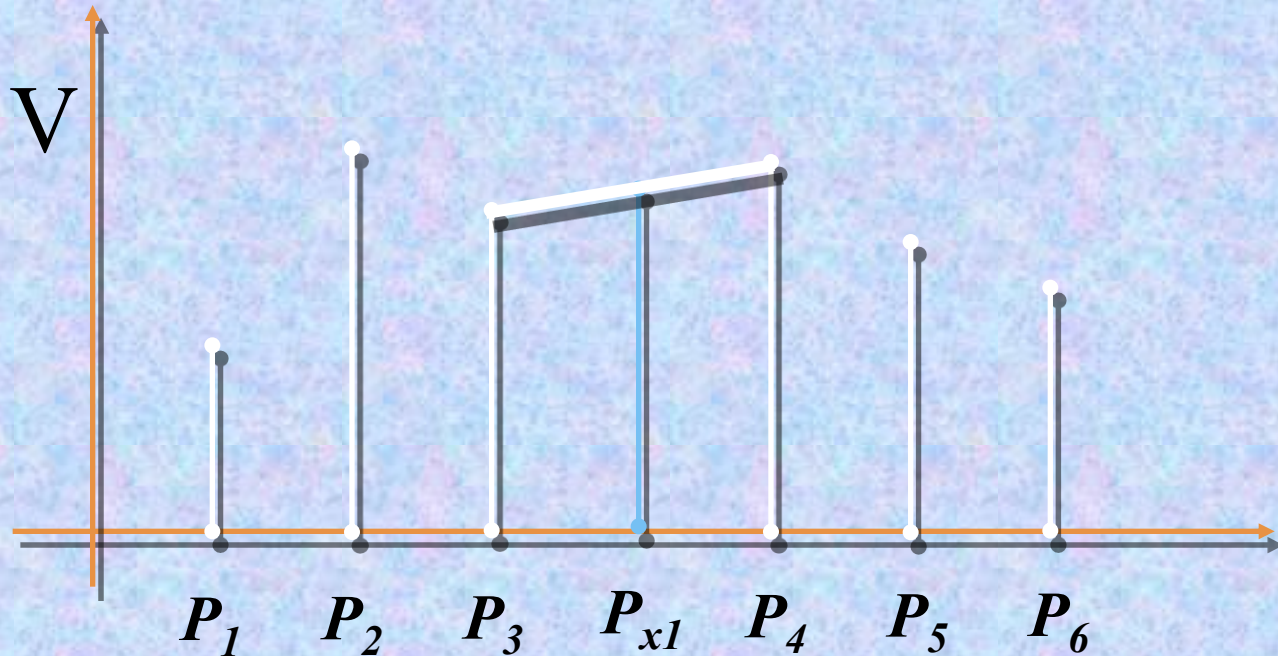
# Interpolazione

Tecnica per determinare i valori assunti da una grandezza in punti intermedi tra punti in cui tale grandezza è nota



# Interpolazione lineare

Si attribuisce un valore che tiene conto della distanza fra i due punti osservati e dei valori ivi riscontrati

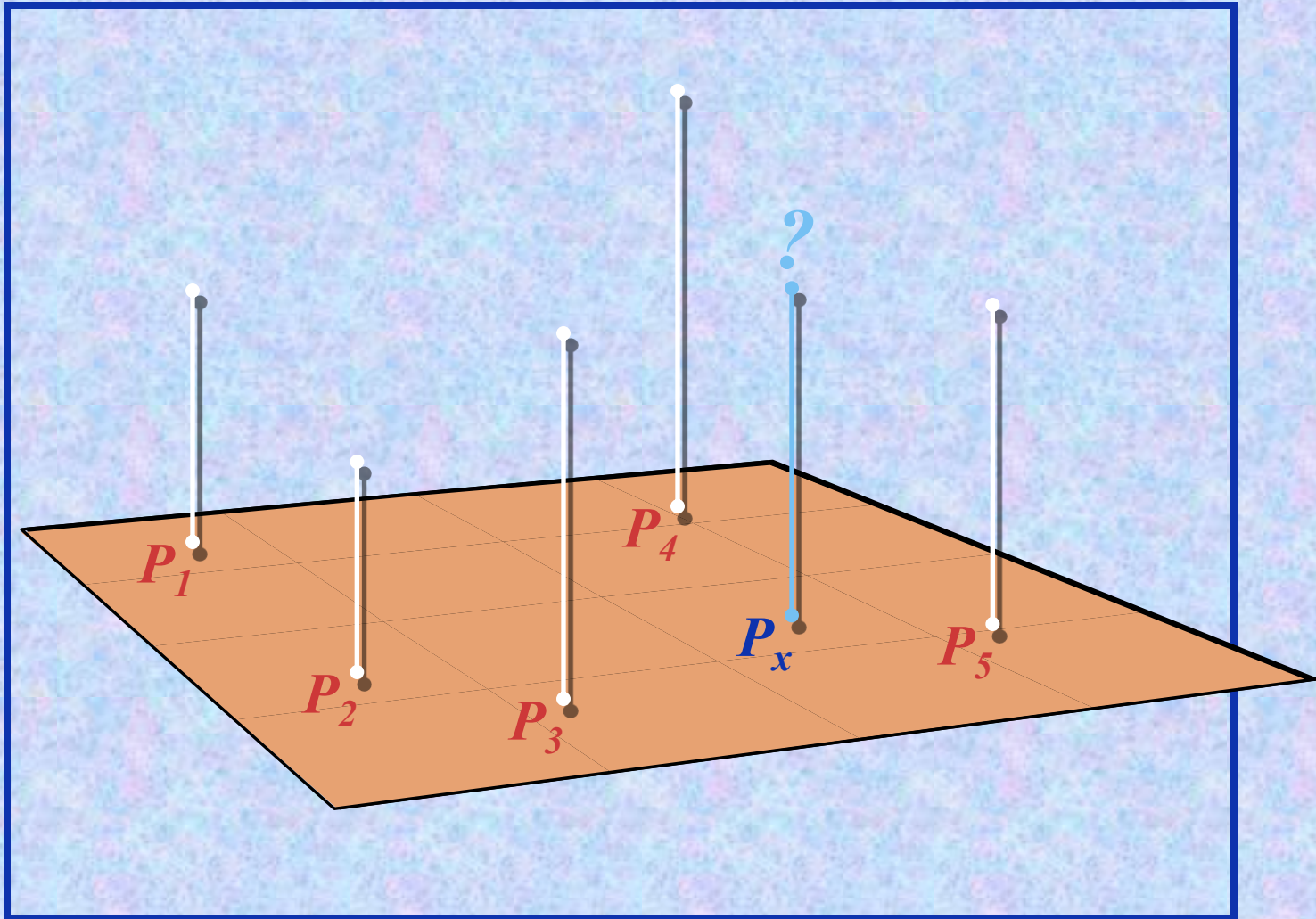


# Interpolazione spaziale

Dato uno spazio dove sono stati misurati in alcuni punti i valori assunti da una grandezza, l'interpolazione spaziale è la tecnica che consente di determinare i valori nei punti dove non sono state effettuate misure.

Nel caso dei DTM la grandezza misurata è la quota (rispetto al mare o rispetto all'ellissoide).

# Interpolazione spaziale



# Interpolazione spaziale mediante TIN

Nello spazio si può usare un processo di interpolazione ricorrendo ad un particolare modello detto *TIN (Triangulated Irregular Network)*.

I punti noti nelle tre coordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vengono uniti mediante triangoli i cui vertici sono proprio i punti del dataset iniziale.

# TIN (Triangulated Irregular Network)

Introdotta nei primi anni '70 (*Peucker et al., 1978*), il TIN rappresenta un vero e proprio modello vettoriale tridimensionale: punti noti nelle tre coordinate  $x,y,z$ , comunque distribuiti nello spazio, vengono congiunti da linee così da formare triangoli piani ed adiacenti (ma distribuiti nello spazio e quindi su piani differenti) che consentono di rappresentare con continuità la superficie del territorio.

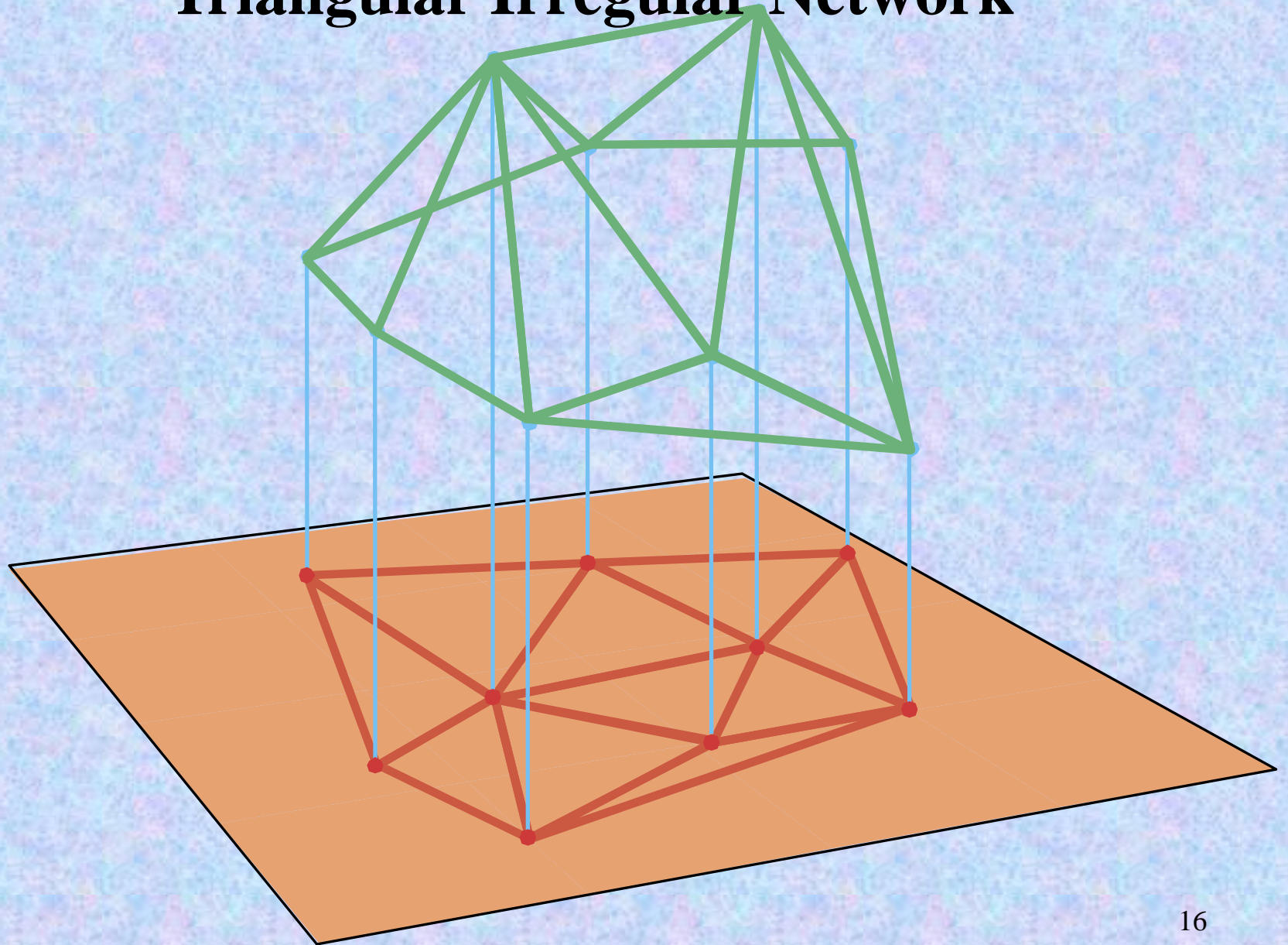
# TIN (Triangulated Irregular Network)

Per stabilire le terne dei punti che costituiscono i singoli triangoli, ovvero per organizzare le maglie di riferimento, si utilizzano algoritmi basati su proprietà geometriche

.

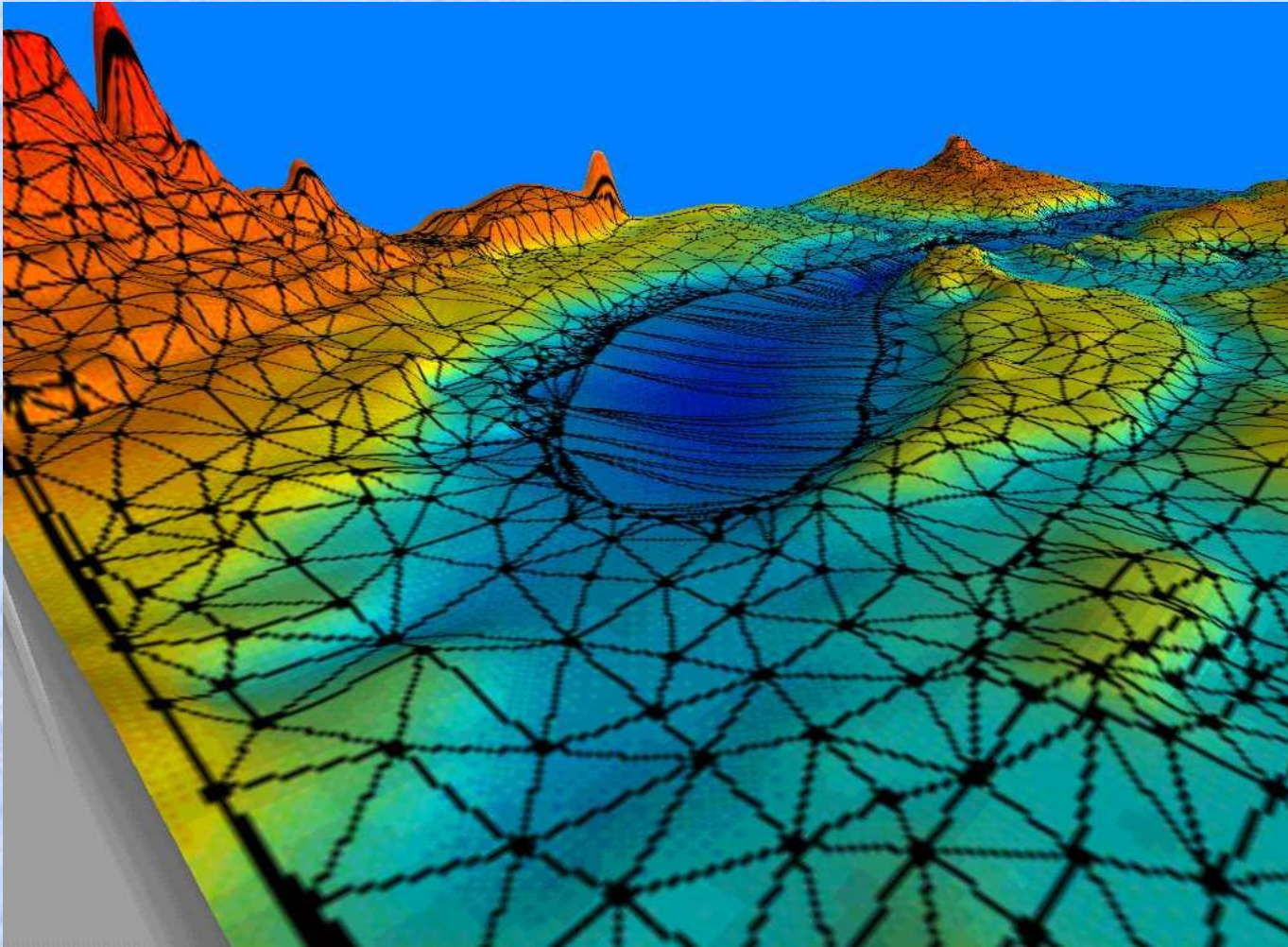
Partendo dall'intuizione di Dirichlet (1850) per la decomposizione di un dominio in più poligoni convessi adiacenti (e non sovrapposti), il metodo di *Delaunay* consente di definire terne di punti tali che il cerchio che circonda ciascun triangolo non contiene altri elementi della serie di partenza.

# Triangular Irregular Network

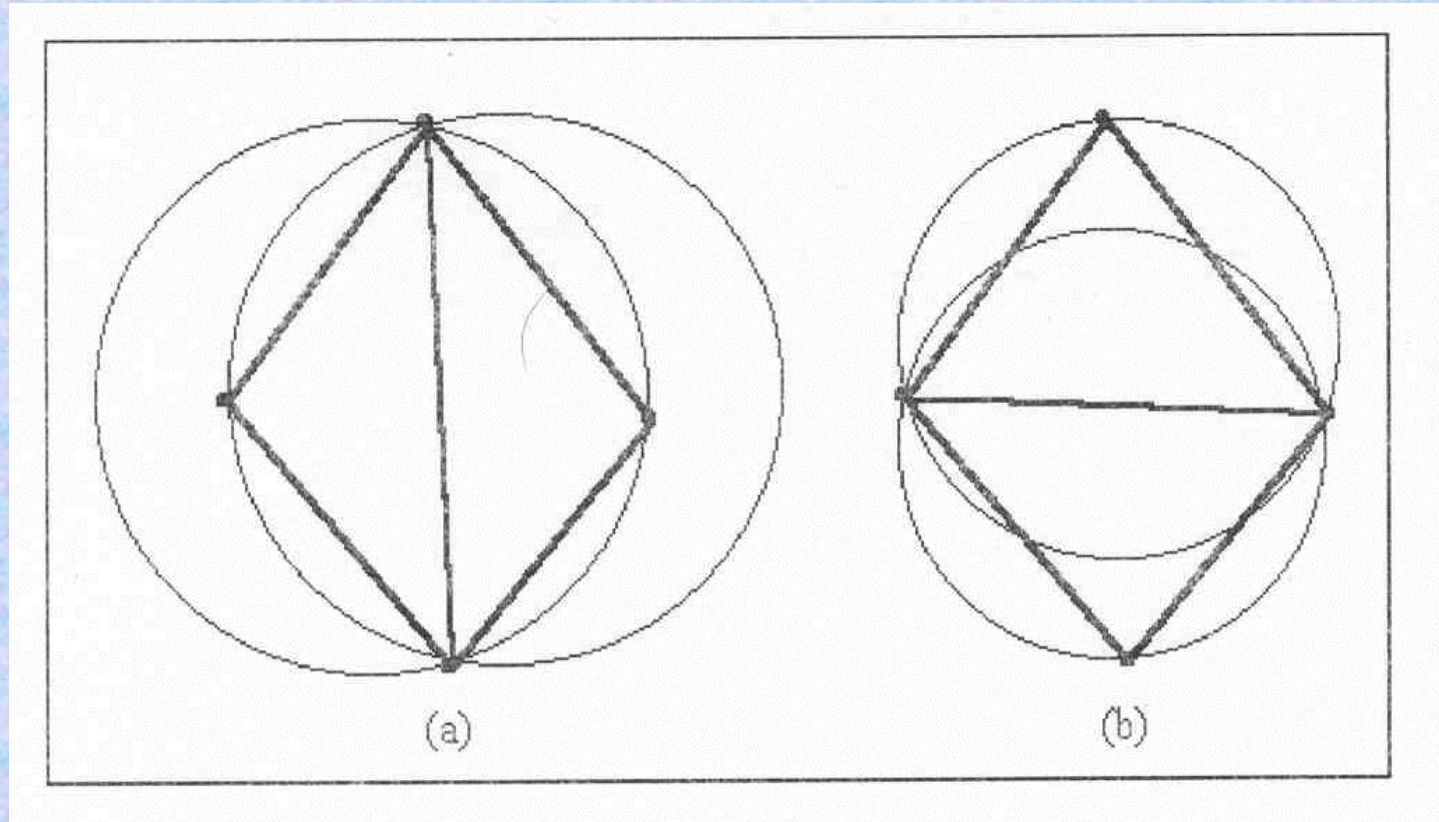




# Triangular Irregular Network



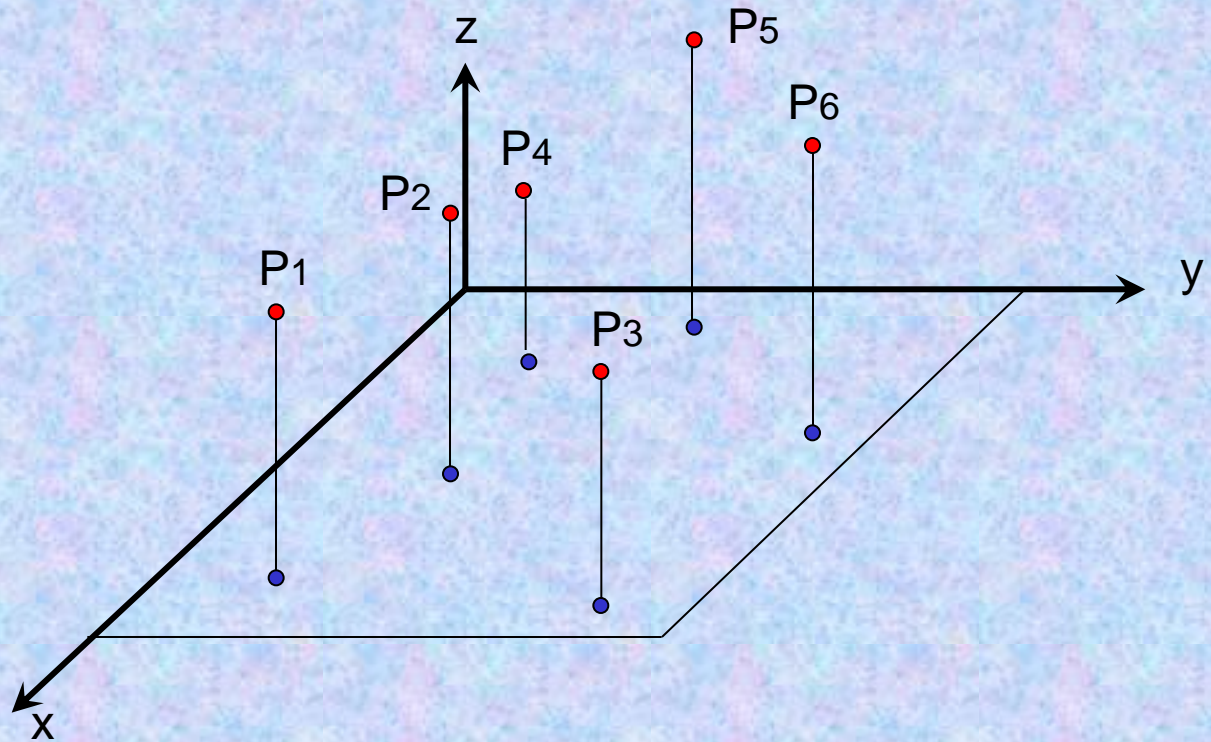
# Triangolazione di Delaunay



Il criterio di Delaunay è soddisfatto nel caso (b),  
ma non in quello (a).

Consideriamo un insieme di punti  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ .  
di cui siano note le coordinate cartesiane  $x, y, z$ , comunque disposti.

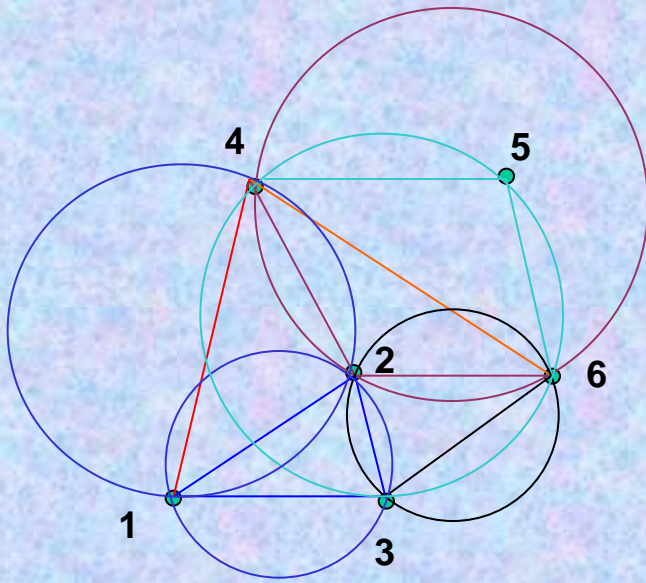
<u>Dati di partenza</u>
$P_1 (x_1; y_1; z_1)$
$P_2 (x_2; y_2; z_2)$
$P_3 (x_3; y_3; z_3)$
$P_4 (x_4; y_4; z_4)$
$P_5 (x_5; y_5; z_5)$
$P_6 (x_6; y_6; z_6)$



Per realizzare la triangolazione, si proiettano i punti noti sul piano  
 $z = \text{cost} < z_{\min}$ ,

Tali punti vengono collegati tra loro in modo da **formare dei triangoli adiacenti**, e non aventi lati che si intersechino. Per realizzare tale collegamento si utilizza il metodo di *Delaunay*, il cerchio passante per tre punti del dataset iniziale non deve contenere altri punti della serie di partenza.

Nel nostro caso si formano i triangoli: 1-2-3 1-2-4 4-2-6 2-6-3 4-6-5



Si disegnano poi tutti i cerchi passanti per i punti costituenti i triangoli realizzati.

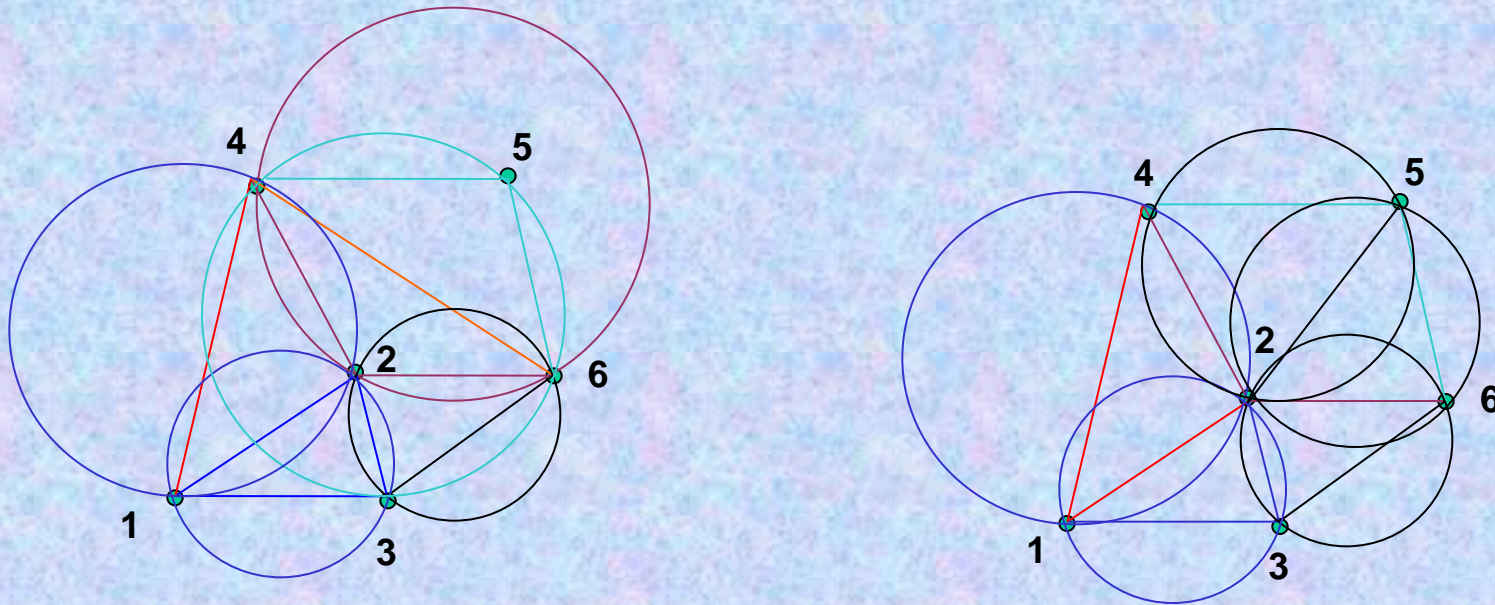
Possiamo verificare che:

Il punto 5 cade nel cerchio 4-2-6

ed il punto 2 cade nel cerchio 4-6-5

**non è rispettato il principio di Delaunay.**

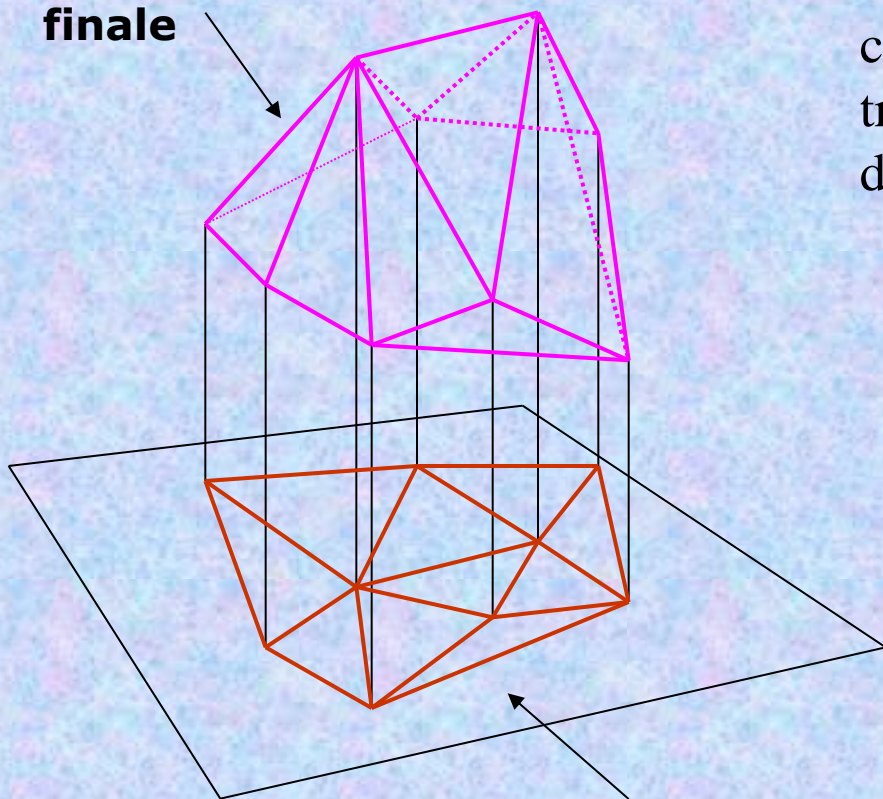
Dobbiamo trovare altre combinazioni, sostituendo ad esempio il lato 4-6 con 2-5 il principio **di Delaunay** risulta soddisfatto:



Si noti come i triangoli della nuova disposizione oltre ad essere più piccoli, tendono ad essere “più equilateri”. Ciò tende a determinare una più accurata rappresentazione della superficie del terreno.

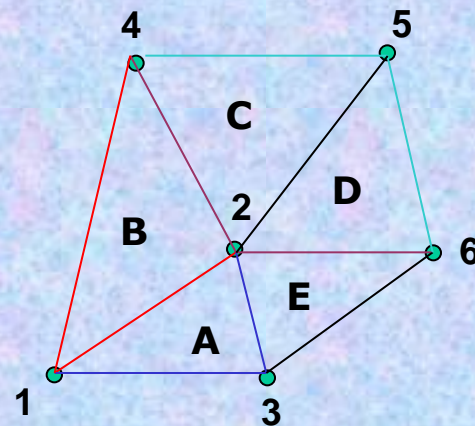
Terminata la triangolazione sul piano x-y, i triangoli ottenuti si riportano “in quota”, facendo assumere ad ogni vertice la rispettiva quota Z. Si ottiene una superficie costituita da una serie di triangoli adiacenti tra loro e inclinati nello spazio.

**Rappresentazione finale**



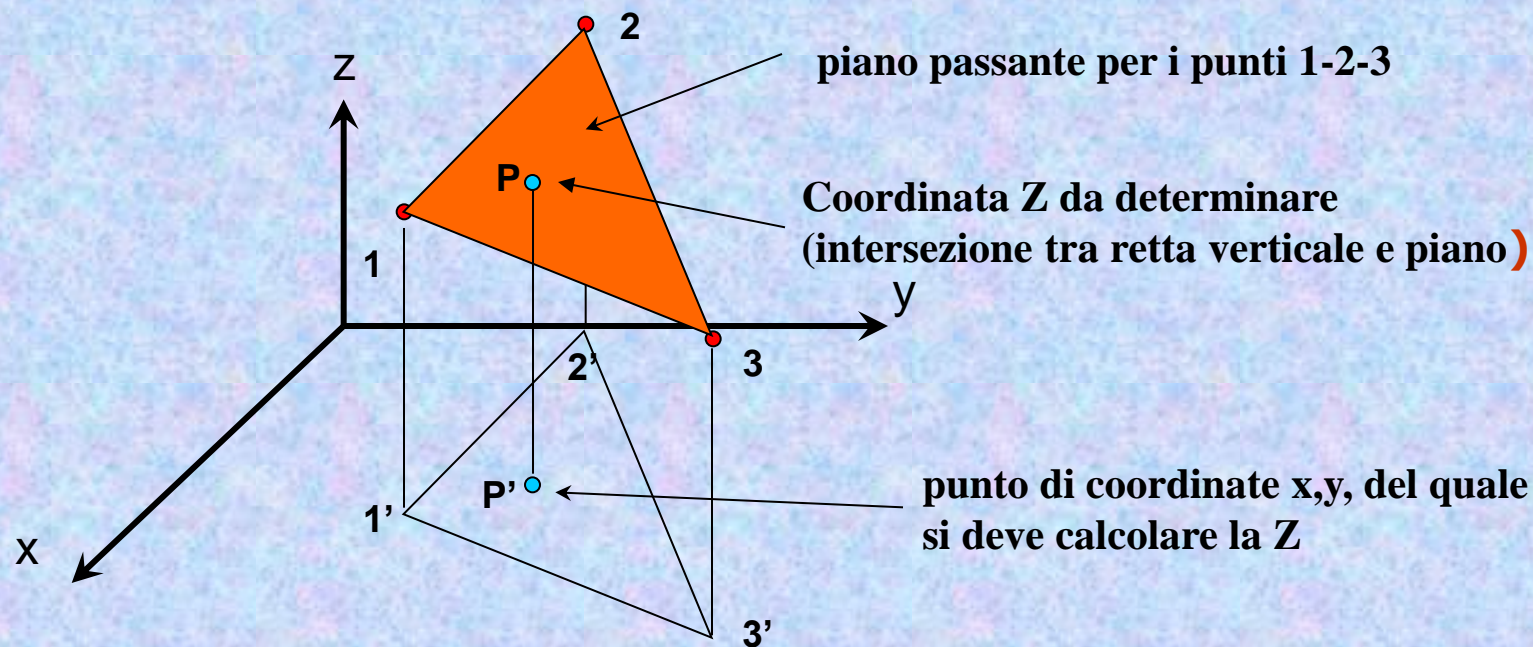
**piano su cui si effettua la triangolazione**

Successivamente si crea una tabella contenente le **relazioni topologiche** della triangolazione, necessaria per l’elaborazione dei dati:



Triangolo	Nodi	Triangoli adiacenti
<b>A</b>	1-2-3	<b>B,E</b>
<b>B</b>	1-2-4	<b>A,C</b>
<b>C</b>	2-4-5	<b>B,D</b>
<b>D</b>	2-5-6	<b>C,E</b>
<b>E</b>	2-6-3	<b>A,D</b> <sup>32</sup>

# Calcolo delle quote dei punti non coincidenti con i vertici del TIN




La quota del punto P corrisponde con l'intersezione tra la verticale per il punto ed il piano definito dai vertici del triangolo in cui ricade P.

L'equazione del piano è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Per trovare i coefficienti si impone il passaggio del piano per i punti noti, e si risolve il sistema di equazioni ottenuto:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \quad \text{ponendo} \quad \frac{a}{d} = a' \quad \frac{b}{d} = b' \quad \frac{c}{d} = c'$$

$$\begin{cases} a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 + 1 = 0 \\ a' x_2 + b' y_2 + c' z_2 + 1 = 0 \\ a' x_3 + b' y_3 + c' z_3 + 1 = 0 \end{cases}$$


$a', b', c'$  sono i coefficienti da determinare, quindi 3 equazioni e 3 incognite

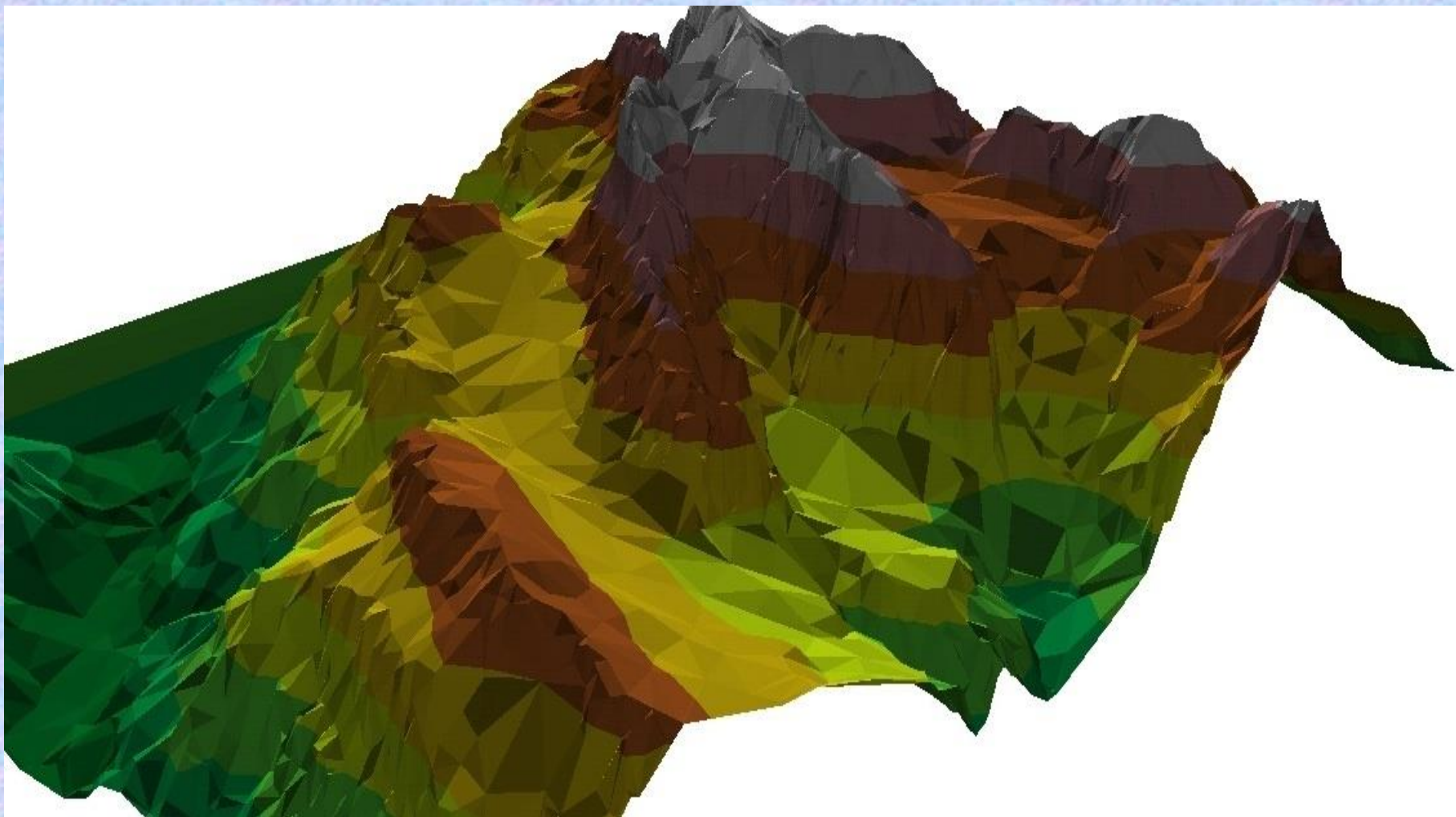
Calcolati  $a', b', c'$ , la quota del punto P di coordinate planimetriche note  $x_P, y_P$  è data da

$$z_P = -\frac{a'}{c'} x_P - \frac{b'}{c'} y_P - \frac{1}{c'}$$

Il procedimento viene ripetuto per tutti i triangoli della rappresentazione.



# Esempio di modellazione TIN



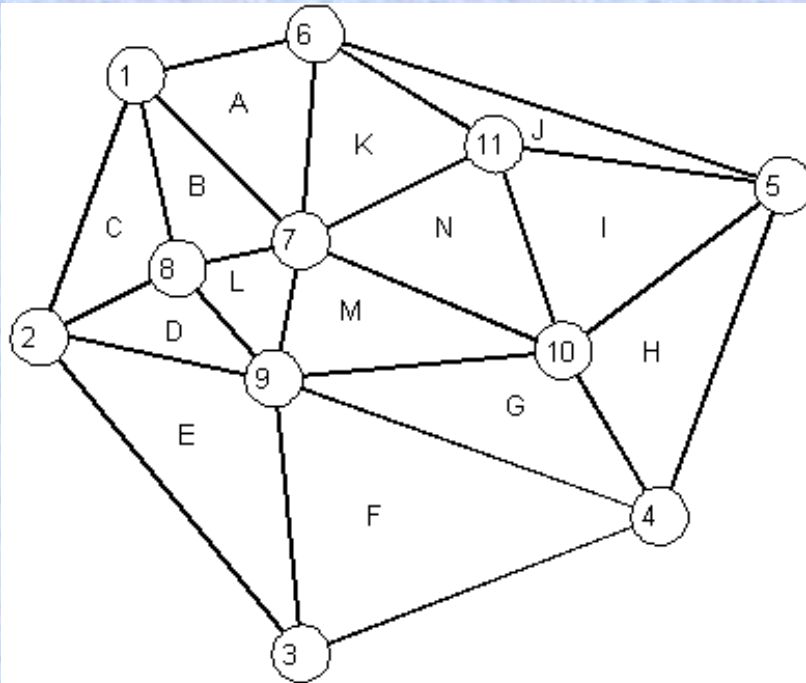
# Riepilogo sulla struttura TIN

In definitiva un modello di tipo TIN risulta costituito da nodi, lati, triangoli, relazioni topologiche.

I nodi sono originati dai punti che compongono la banca dati iniziale, di cui consentono una rappresentazione geometrica nello spazio 3d; i lati sono determinati dalla triangolazione; i triangoli esprimono l'approssimazione della superficie reale con un modello matematico; le relazioni topologiche definiscono i nodi e i lati di ciascun triangolo e l'adiacenza dello stesso ad altri.

Di conseguenza la struttura del TIN è tale da archiviare i dati sotto forma di tabelle relative ai valori delle coordinate (x,y,z) e alle relazioni esistenti tra gli elementi della mosaicatura.

# Triangular Irregular Network



X-Y Coordinates	
node#	coordinates
1	x1, y1
2	x2, y2
3	x3, y3
...	...
11	x11, y11

Z Coordinates	
node#	z_value
1	z1
2	z2
3	z3
...	...
11	z11

EDGES	
△	adjacent △
A	B, K
B	A, C, L
C	B, D
D	C, E, L
E	D, F
F	E, G
G	F, H, M
H	G, I
I	H, J, N
J	I, K
K	A, J, N
L	B, D, M
M	G, L, N
N	I, K, M

NODES	
△	node#
A	1, 6, 7
B	1, 7, 8
C	1, 2, 8
D	2, 8, 9
E	2, 3, 9
F	3, 4, 9
G	4, 9, 10
H	4, 5, 10
I	5, 10, 11
J	5, 6, 11
K	6, 7, 11
L	7, 8, 9
M	7, 9, 10
N	7, 10, 11

# Riferimenti bibliografici

Alcune immagini sono tratte da:

- Mogorovich, Sistemi Informativi Territoriali, Consorzio Nettuno.