



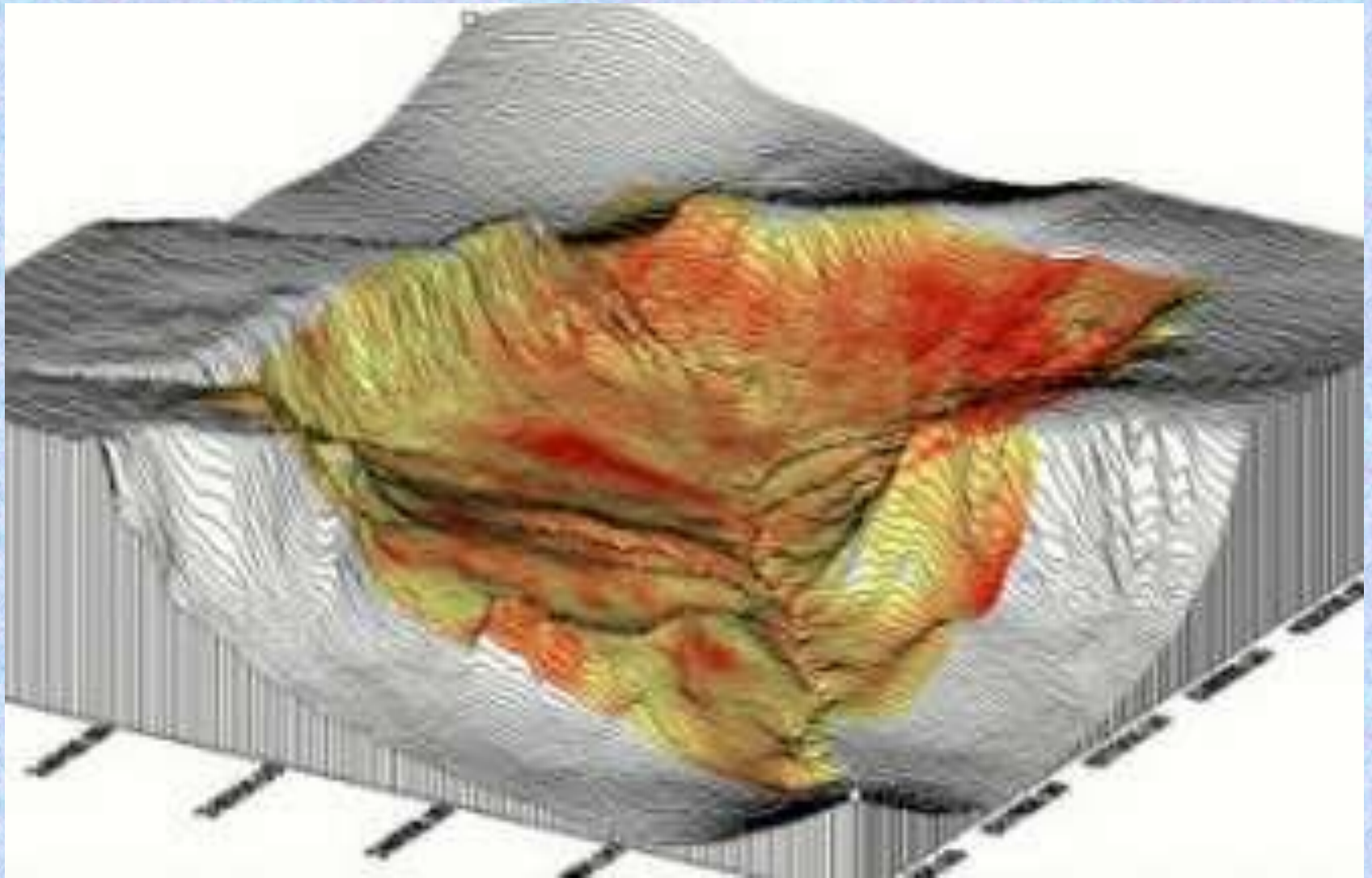
*Università degli Studi di Napoli “Parthenope”
Dipartimento di Scienze e Tecnologie*

Corso di Cartografia Numerica e ECDIS

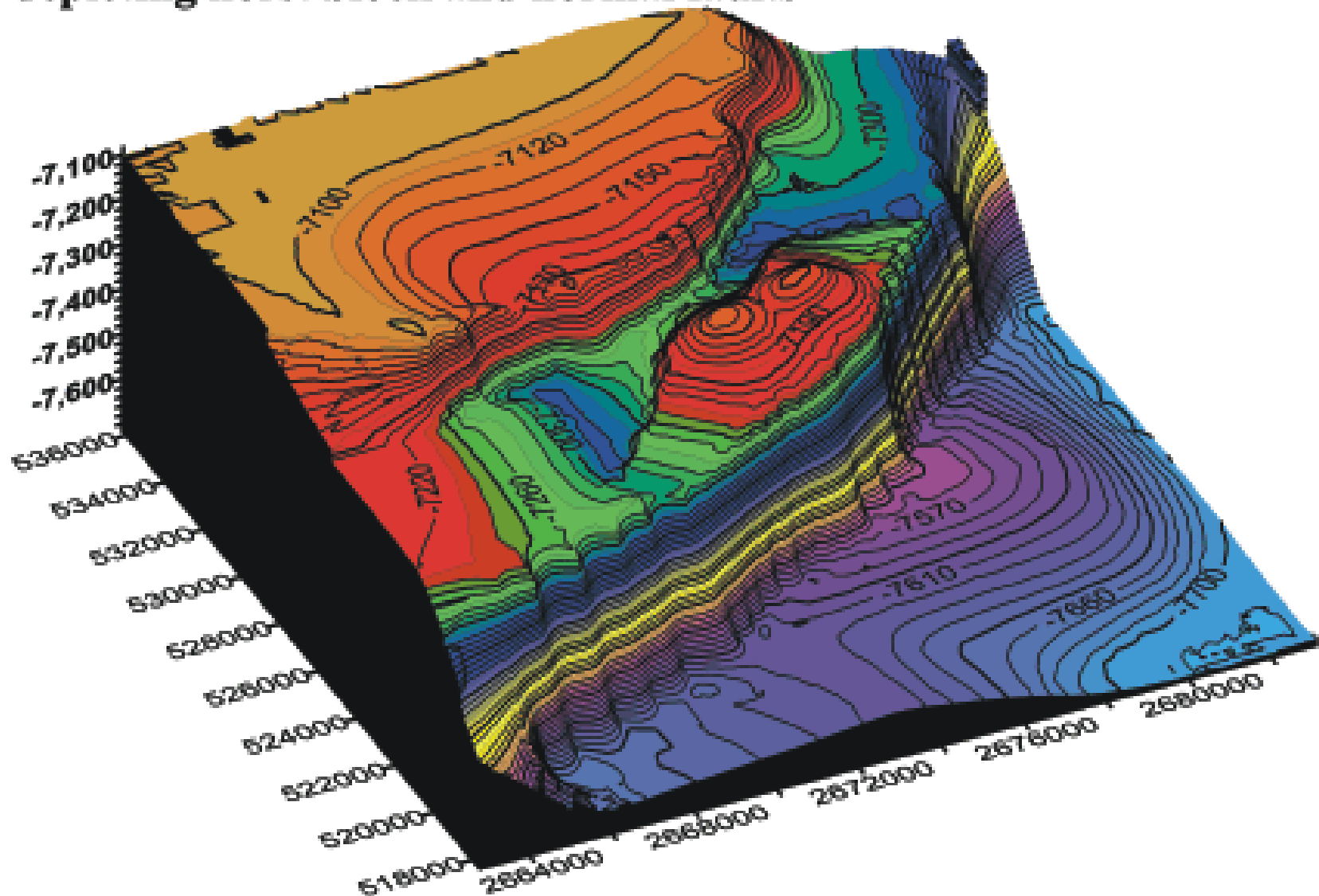
Lezione 9

**La rappresentazione della terza dimensione: i modelli
digitali del terreno**

**La costruzione di TIN
(Triangular Irregular Network)**



Wilcox Surface Map depicting horst block and normal faults



Terminologia ricorrente

- *Triangulated Irregular Network (TIN);*
- *Digital Elevation Model (DEM);*
- *Digital Height Model (DHM);*
- *Digital Ground Model (DGM);*
- *Digital Terrain Elevation Data (DTED);*
- *Grid;*
- *Digital terrain Model (DTM).*

DTM

Si definisce DTM “una rappresentazione statistica di una superficie continua del terreno attraverso un numero elevato di punti noti nelle coordinate x,y,z relative ad un sistema arbitrario di riferimento”.

Miller e La Flamme, Massachusetts Institute of Technology (MIT), 1958

Etimologia

Le diverse espressioni sono spesso utilizzate come sinonimi, ma una differenziazione nelle interpretazioni più rigorose è comunque adottata dagli addetti ai lavori, anzitutto in relazione al significato che hanno i diversi termini in gioco.

Etimologia

DTM (Digital Terrain Model) è il termine più generale ed indica un qualsiasi modello digitale del terreno, a prescindere dalle sue peculiarità.

Il termine ***TIN (Triangular o Triangulated Irregular Network)*** e ***DEM (Digital Elevation Model)***, quest'ultimo detto più propriamente ***Grid***, indicano le due principali (e differenti) famiglie di DTM. In particolare essi indicano due diversi modi di costruire la struttura dei Modelli Digitali del Terreno.

DTM, TIN e DEM

Alla base della costruzione del DTM rimane comunque una delle due strutture fondamentali, ovvero o il TIN o il DEM (quest'ultimo detto anche Grid).

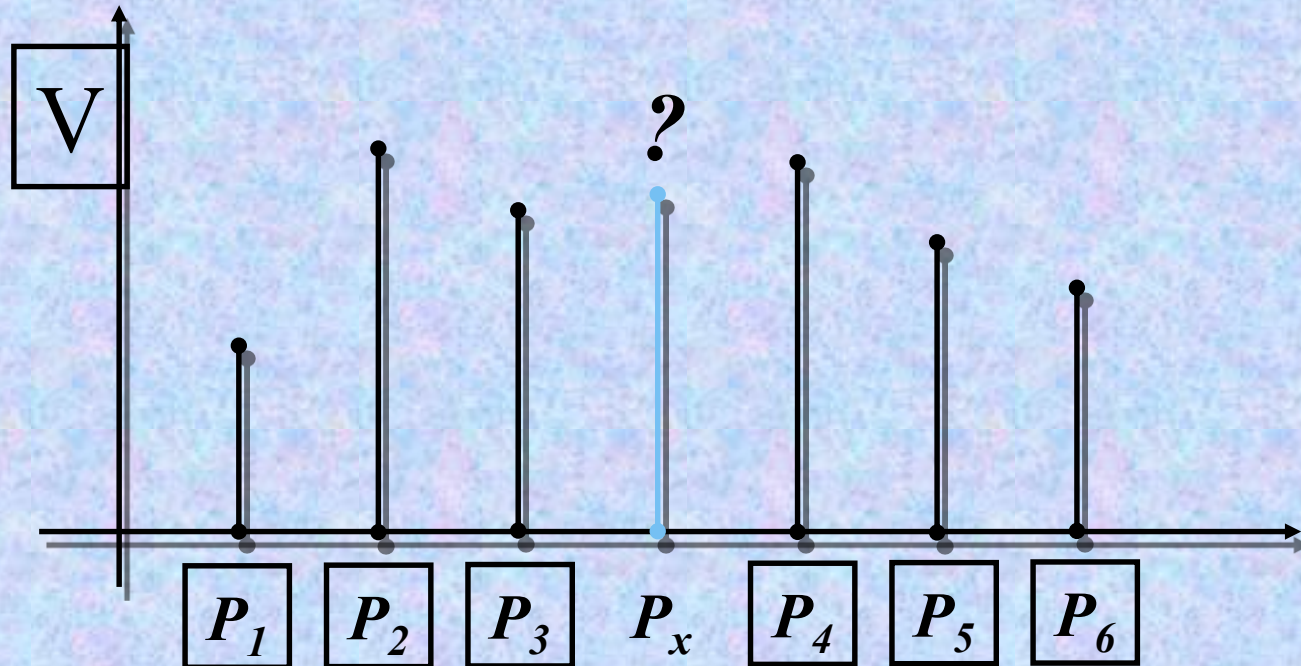
Nelle slide seguenti si illustrano le caratteristiche principali, nonché le modalità operative per la realizzazione del TIN. Il grid è oggetto della lezione successiva.

Entrambi i modelli richiedono l'applicazione di algoritmi di interpolazione spaziale.

Definiamo prima l'interpolazione lineare nel piano e poi quella nello spazio.

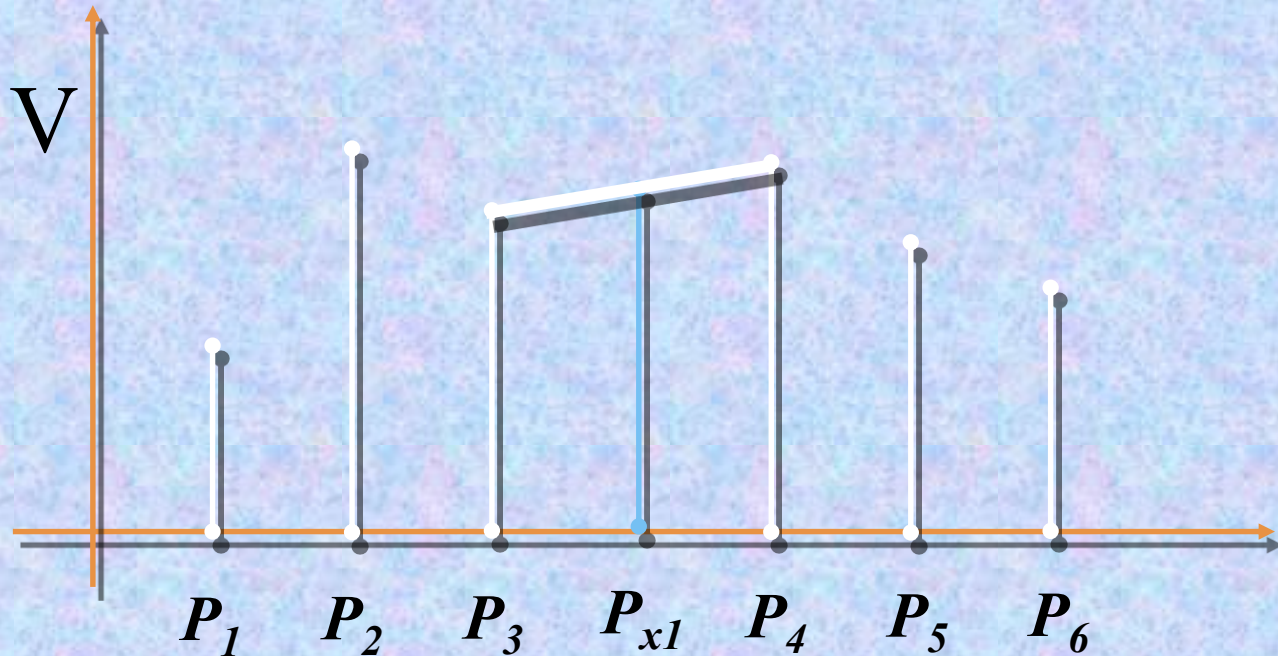
Interpolazione

Tecnica per determinare i valori assunti da una grandezza in punti intermedi tra punti in cui tale grandezza è nota



Interpolazione lineare

Si attribuisce un valore che tiene conto della distanza fra i due punti osservati e dei valori ivi riscontrati

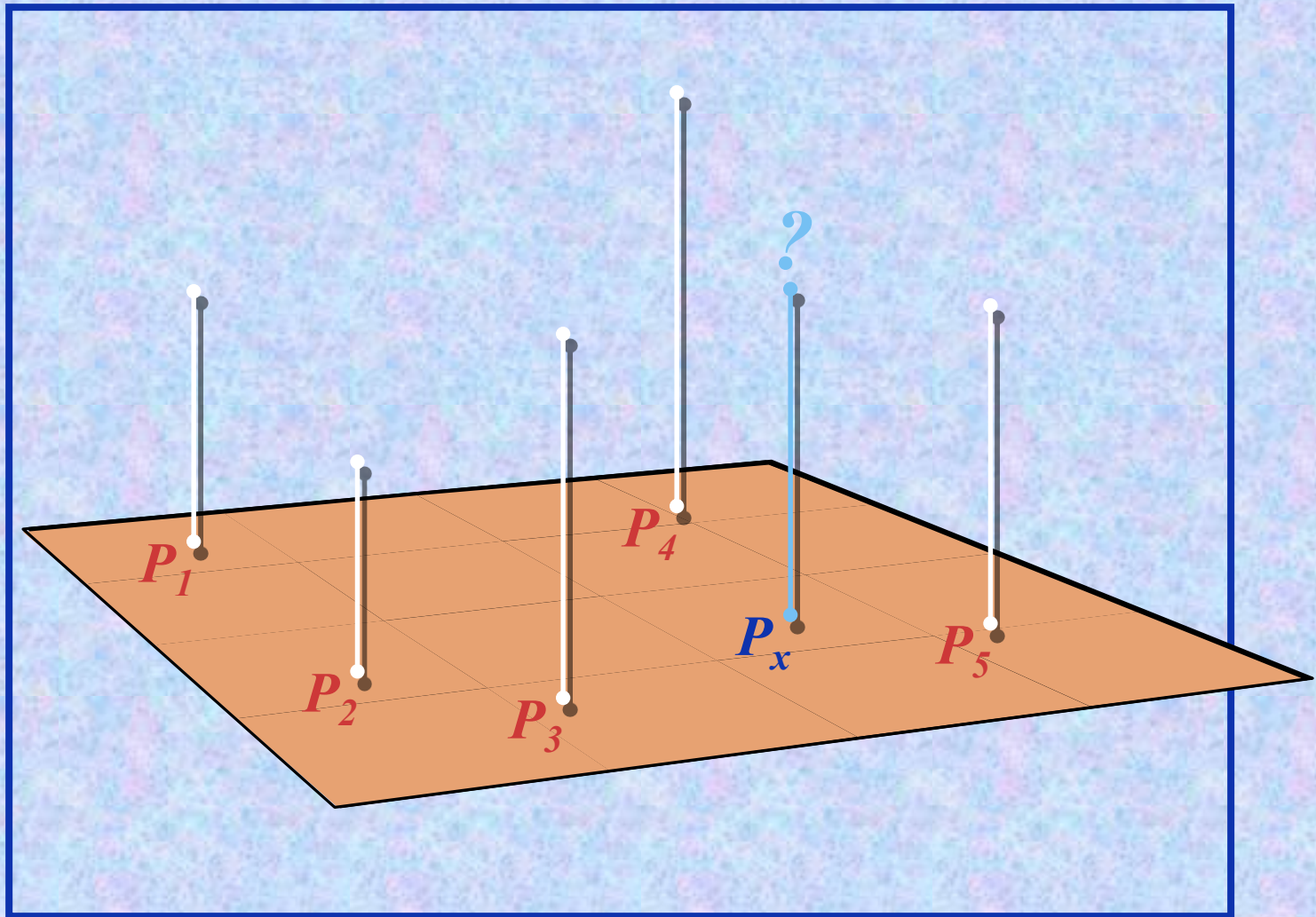


Interpolazione spaziale

Dato uno spazio dove sono stati misurati in alcuni punti i valori assunti da una grandezza, l'interpolazione spaziale è la tecnica che consente di determinare i valori nei punti dove non sono state effettuate misure.

Nel caso dei DTM la grandezza misurata è la quota (rispetto al mare o rispetto all'ellissoide).

Interpolazione spaziale



Interpolazione spaziale mediante TIN

Nello spazio si può usare un processo di interpolazione ricorrendo ad un particolare modello detto ***TIN (Triangulated Irregular Network)***.

I punti noti nelle tre coordinate x , y , z vengono uniti mediante triangoli i cui vertici sono proprio i punti del dataset iniziale.

TIN (Triangulated Irregular Network)

Introdotta nei primi anni '70 (*Peucker et al., 1978*), il TIN rappresenta un vero e proprio modello vettoriale tridimensionale: punti noti nelle tre coordinate x,y,z , comunque distribuiti nello spazio, vengono congiunti da linee così da formare triangoli piani ed adiacenti (ma distribuiti nello spazio e quindi su piani differenti) che consentono di rappresentare con continuità la superficie del territorio.

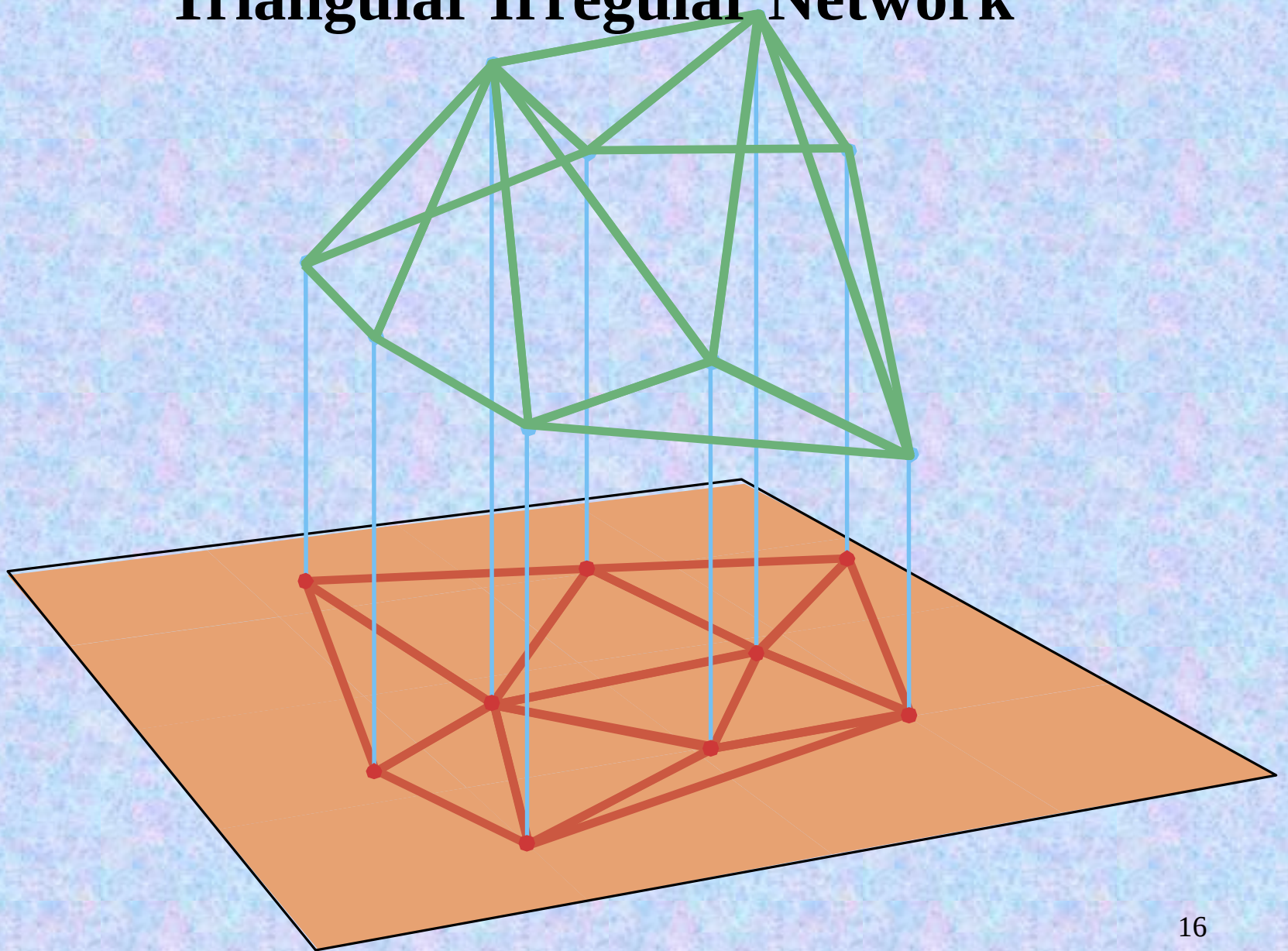
TIN (Triangulated Irregular Network)

Per stabilire le terne dei punti che costituiscono i singoli triangoli, ovvero per organizzare le maglie di riferimento, si utilizzano algoritmi basati su proprietà geometriche

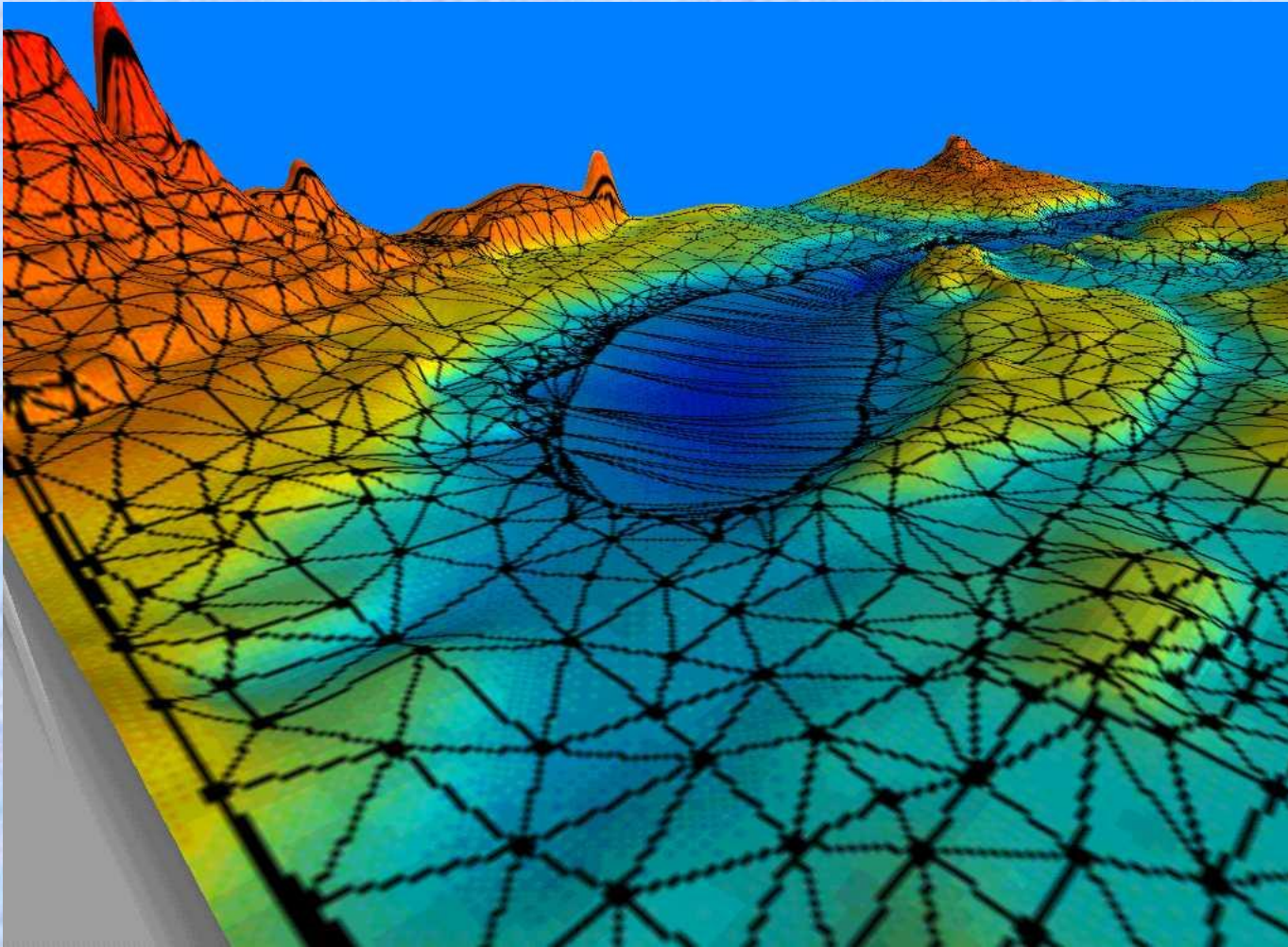
.

Partendo dall'intuizione di Dirichlet (1850) per la decomposizione di un dominio in più poligoni convessi adiacenti (e non sovrapposti), il metodo di *Delaunay* consente di definire terne di punti tali che il cerchio che circoscrive ciascun triangolo non contiene altri elementi della serie di partenza.

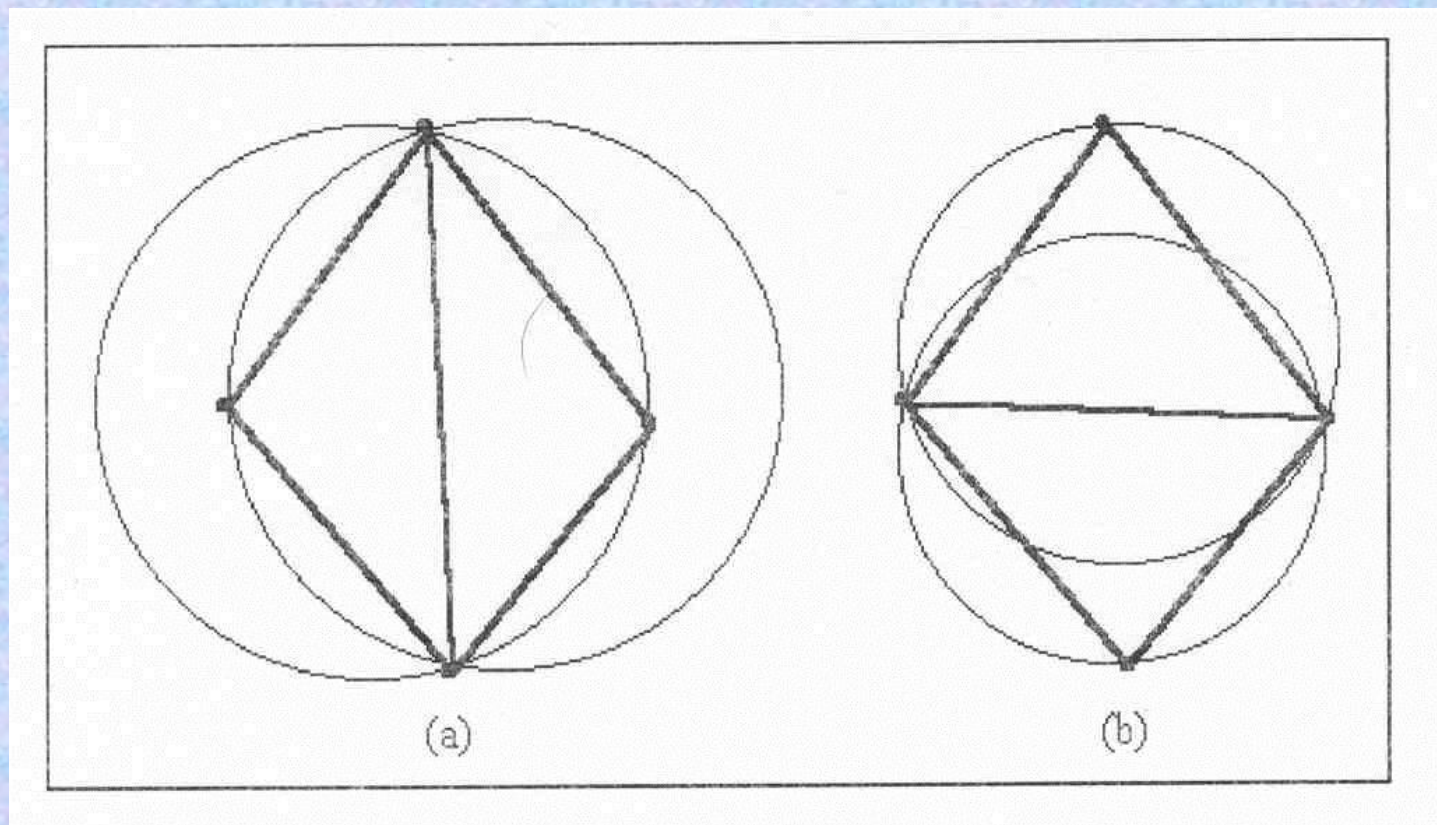
Triangular Irregular Network



Triangular Irregular Network



Triangolazione di Delaunay



Il criterio di Delaunay è soddisfatto nel caso (b),
ma non in quello (a).

Consideriamo un insieme di punti $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.
di cui siano note le coordinate cartesiane x, y, z , comunque disposti.

Dati di partenza

$P_1 (x_1; y_1; z_1)$

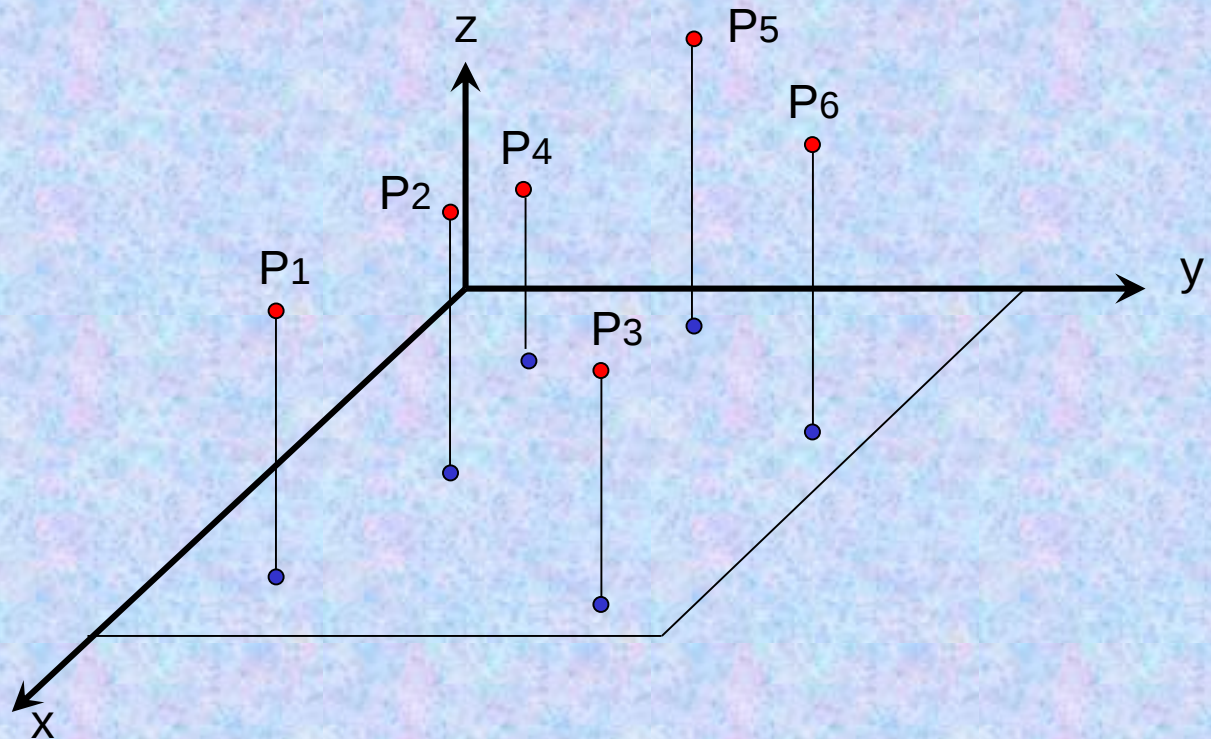
$P_2 (x_2; y_2; z_2)$

$P_3 (x_3; y_3; z_3)$

$P_4 (x_4; y_4; z_4)$

$P_5 (x_5; y_5; z_5)$

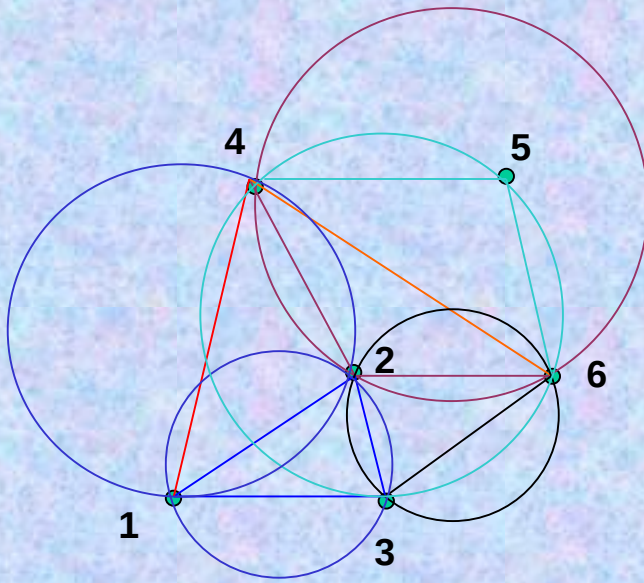
$P_6 (x_6; y_6; z_6)$



Per realizzare la triangolazione, si proiettano i punti noti sul piano
 $z = \text{cost} < z_{\min}$,

Tali punti vengono collegati tra loro in modo da **formare dei triangoli adiacenti**, e non aventi lati che si intersechino. Per realizzare tale collegamento si utilizza il metodo di *Delaunay*, il cerchio passante per tre punti del dataset iniziale non deve contenere altri punti della serie di partenza.

Nel nostro caso si formano i triangoli: 1-2-3 1-2-4 4-2-6 2-6-3 4-6-5



Si disegnano poi tutti i cerchi passanti per i punti costituenti i triangoli realizzati.

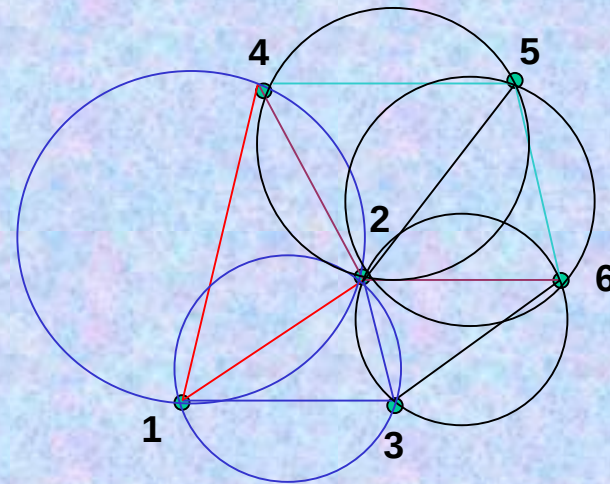
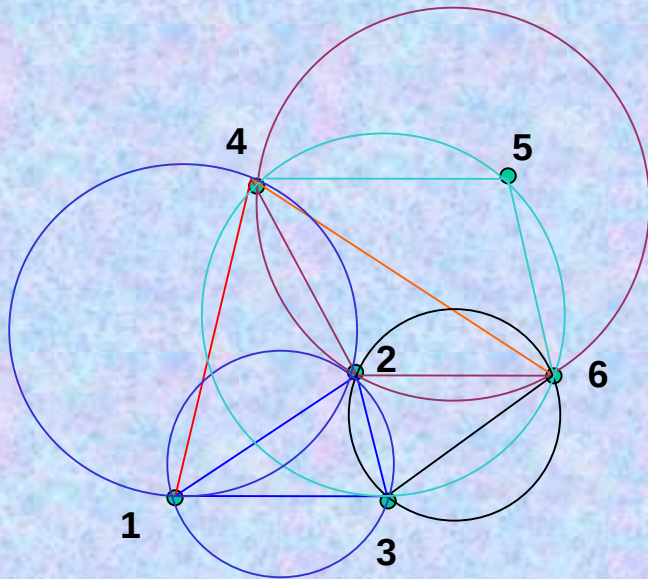
Possiamo verificare che:

Il punto 5 cade nel cerchio 4-2-6

ed il punto 2 cade nel cerchio 4-6-5

non è rispettato il principio di Delaunay.

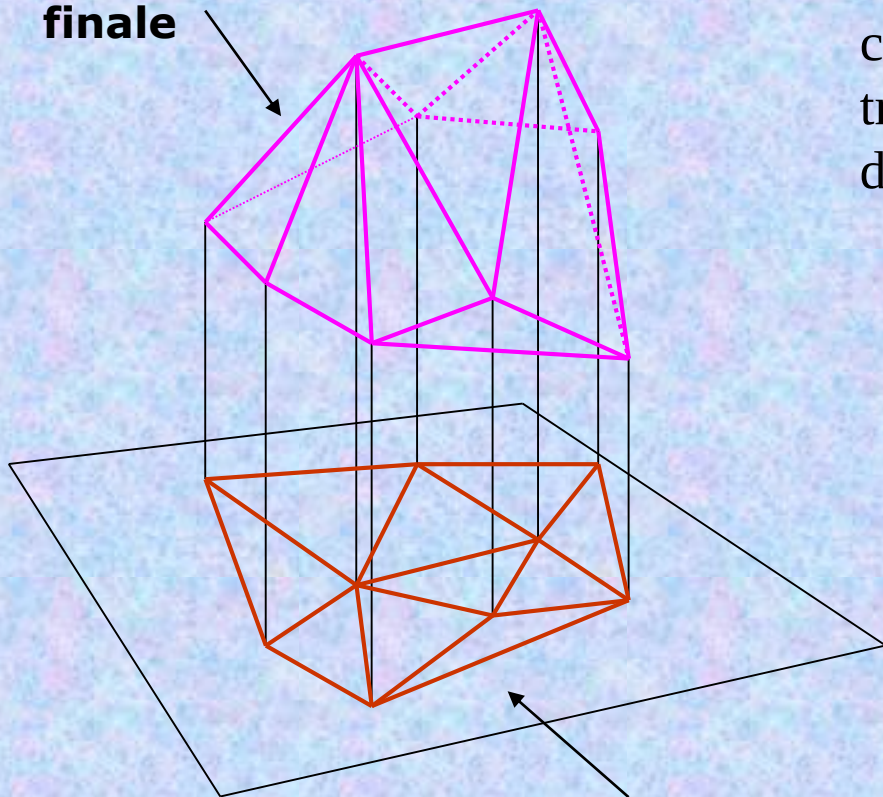
Dobbiamo trovare altre combinazioni, sostituendo ad esempio il lato 4-6 con 2-5 il principio **di Delaunay** risulta soddisfatto:



Si noti come i triangoli della nuova disposizione oltre ad essere più piccoli, tendono ad essere “più equilateri”. Ciò tende a determinare una più accurata rappresentazione della superficie del terreno.

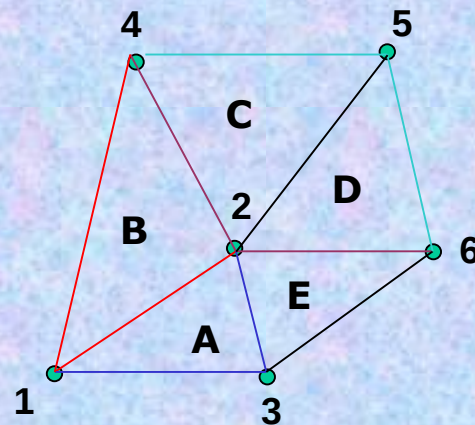
Terminata la triangolazione sul piano x-y, i triangoli ottenuti si riportano “in quota”, facendo assumere ad ogni vertice la rispettiva quota Z. Si ottiene una superficie costituita da una serie di triangoli adiacenti tra loro e inclinati nello spazio.

**Rappresentazione
finale**



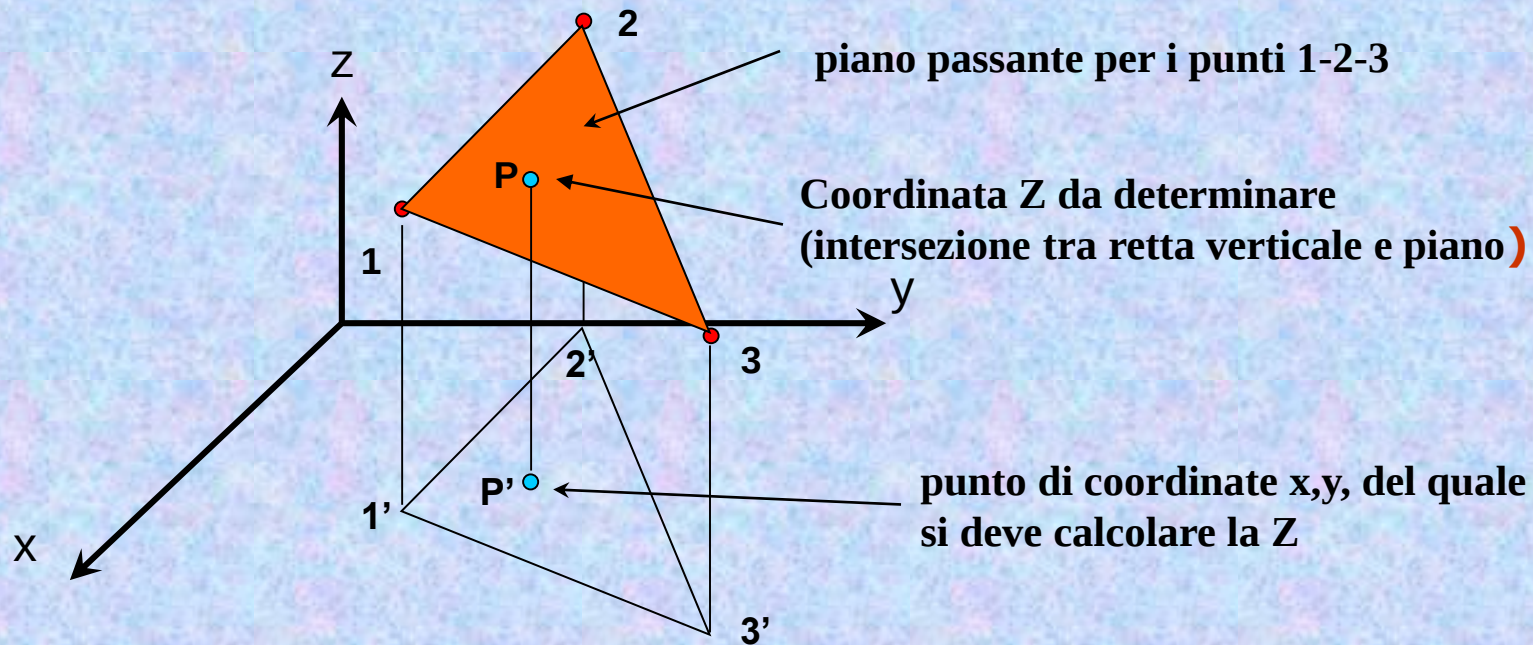
**piano su cui si effettua
la triangolazione**

Successivamente si crea una tabella contenente le relazioni topologiche della triangolazione, necessaria per l’elaborazione dei dati:



Triangolo	Nodi	Triangoli adiacenti
A	1-2-3	B,E
B	1-2-4	A,C
C	2-4-5	B,D
D	2-5-6	C,E
E	2-6-3	A,D ³²

Calcolo delle quote dei punti non coincidenti con i vertici del TIN



La quota del punto P corrisponde con l'intersezione tra la verticale per il punto ed il piano definito dai vertici del triangolo in cui ricade P.

L'equazione del piano è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Per trovare i coefficienti si impone il passaggio del piano per i punti noti, e si risolve il sistema di equazioni ottenuto:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \quad \text{ponendo} \quad \frac{a}{d} = a' \quad \frac{b}{d} = b' \quad \frac{c}{d} = c'$$

$$\begin{cases} a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + 1 = 0 \\ a'x_2 + b'y_2 + c'z_2 + 1 = 0 \\ a'x_3 + b'y_3 + c'z_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

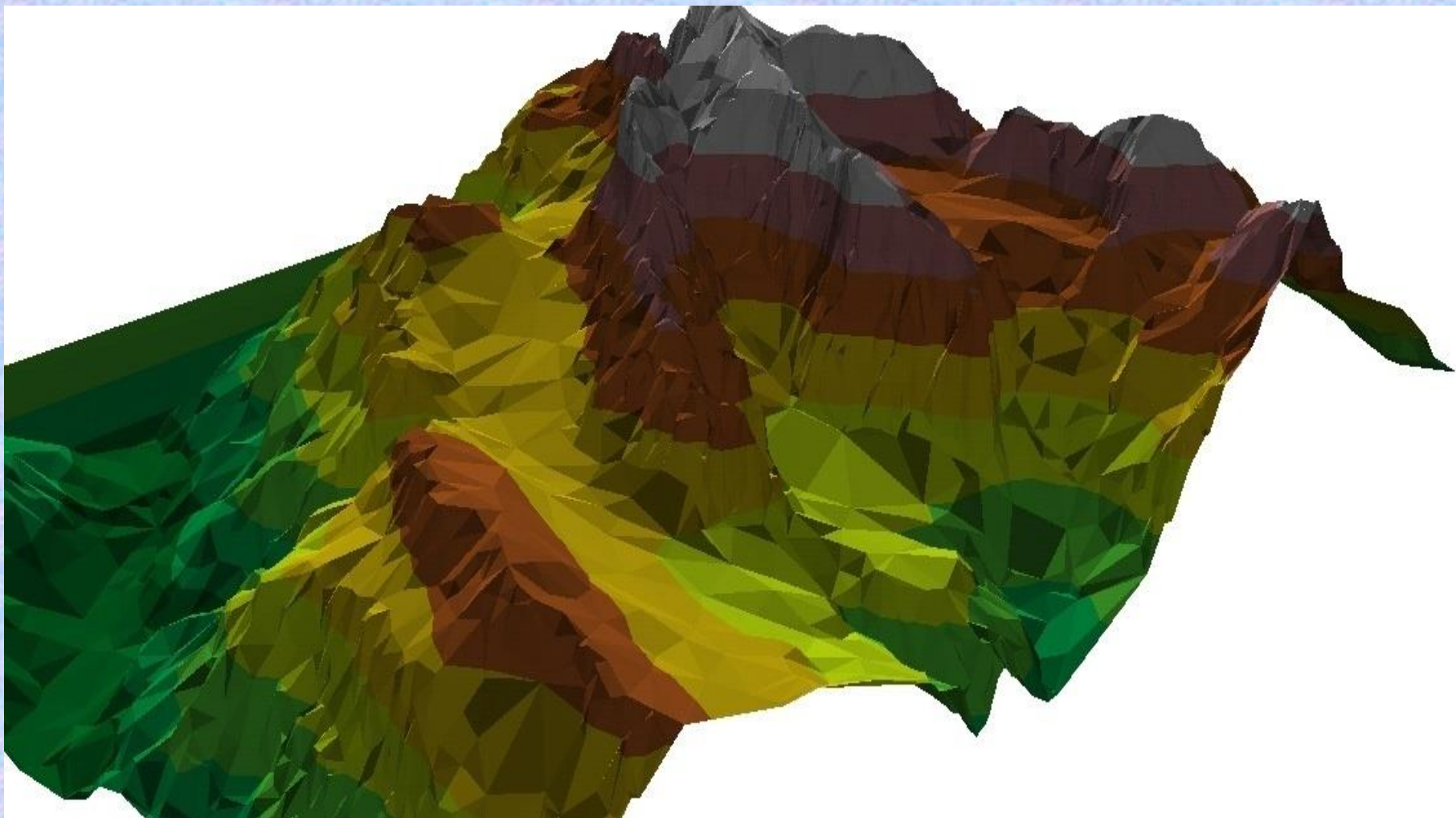

a', b', c' sono i coefficienti da determinare, quindi 3 equazioni e 3 incognite

Calcolati a', b', c' , la quota del punto P di coordinate planimetriche note $x_P y_P$ è data da

$$z_P = -\frac{a'}{c'} x_P - \frac{b'}{c'} y_P - \frac{1}{c'}$$

Il procedimento viene ripetuto per tutti i triangoli della rappresentazione.

Esempio di modellazione TIN



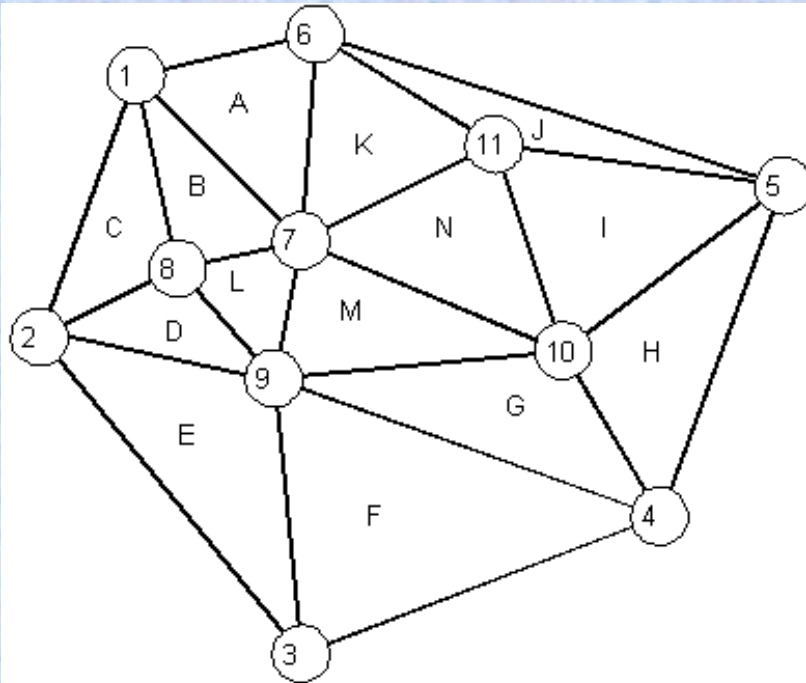
Riepilogo sulla struttura TIN

In definitiva un modello di tipo TIN risulta costituito da nodi, lati, triangoli, relazioni topologiche.

I nodi sono originati dai punti che compongono la banca dati iniziale, di cui consentono una rappresentazione geometrica nello spazio 3d; i lati sono determinati dalla triangolazione; i triangoli esprimono l'approssimazione della superficie reale con un modello matematico; le relazioni topologiche definiscono i nodi e i lati di ciascun triangolo e l'adiacenza dello stesso ad altri.

Di conseguenza la struttura del TIN è tale da archiviare i dati sotto forma di tabelle relative ai valori delle coordinate (x,y,z) e alle relazioni esistenti tra gli elementi della mosaicatura.

Triangular Irregular Network



X-Y Coordinates	
node#	coordinates
1	x1, y1
2	x2, y2
3	x3, y3
...	...
11	x11, y11

Z Coordinates	
node#	z_value
1	z1
2	z2
3	z3
...	...
11	z11

EDGES		
△	adjacent	△
A	B, K	
B	A, C, L	
C	B, D	
D	C, E, L	
E	D, F	
F	E, G	
G	F, H, M	
H	G, I	
I	H, J, N	
J	I, K	
K	A, J, N	
L	B, D, M	
M	G, L, N	
N	I, K, M	

NODES	
△	node#
A	1, 6, 7
B	1, 7, 8
C	1, 2, 8
D	2, 8, 9
E	2, 3, 9
F	3, 4, 9
G	4, 9, 10
H	4, 5, 10
I	5, 10, 11
J	5, 6, 11
K	6, 7, 11
L	7, 8, 9
M	7, 9, 10
N	7, 10, 11

Riferimenti bibliografici

Alcune immagini sono tratte da:

- Mogorovich, Sistemi Informativi Territoriali, Consorzio Nettuno.