Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Corso di Cartografia Numerica e ECDIS

Lezione 2

Modellazione della terra: approfondimenti sull'ellissoide; il geoide.

Introduzione alla Cartografia

Claudio Parente

Raggi di curvatura

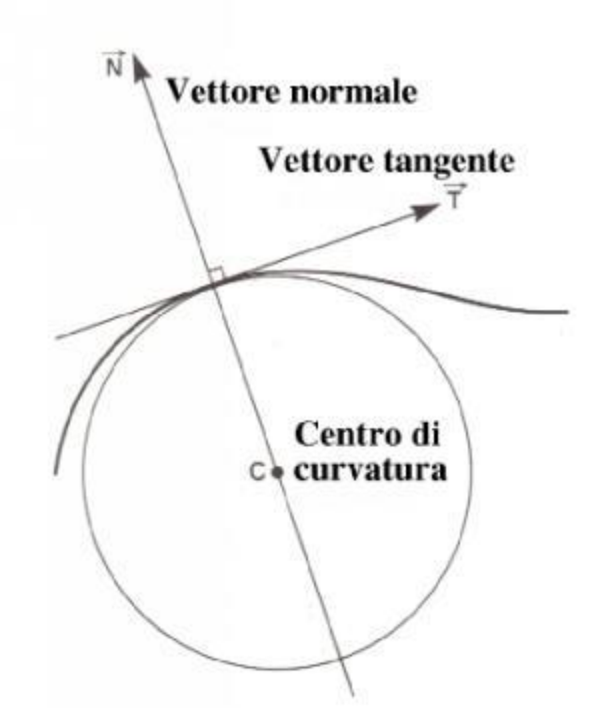
Data una qualsiasi curva, si può definire per ogni punto di essa un raggio di curvatura.

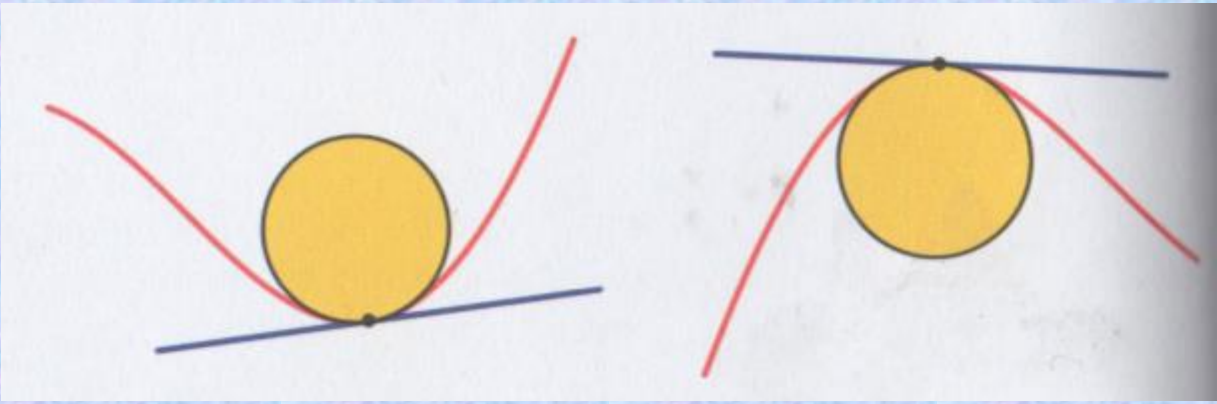
Per una circonferenza il raggio di curvatura è costante e rappresenta la distanza di ciascun punto della circonferenza dal centro.

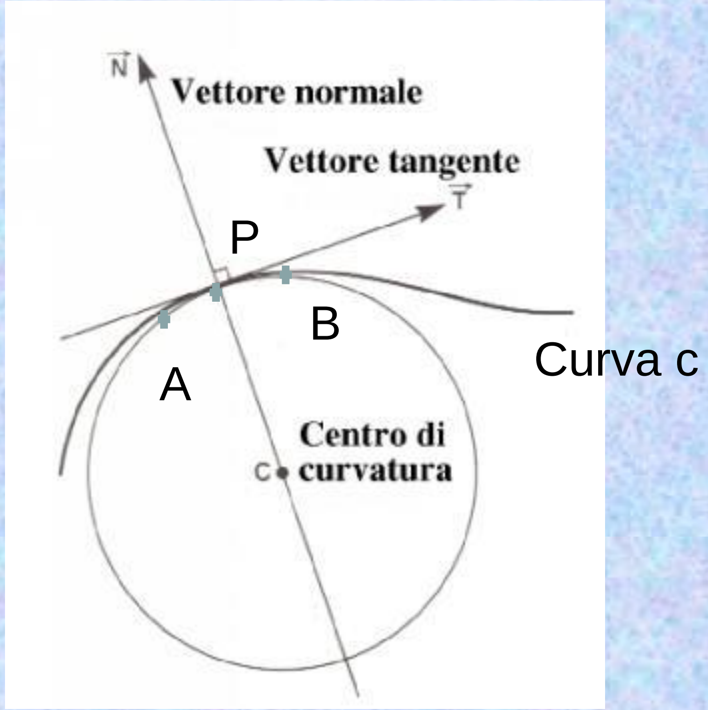
Raggi di curvatura

Per una curva qualsiasi, il raggio di curvatura in un punto è il raggio della circonferenza che meglio approssima la curva in quel punto.

Tale circonferenza è detta **circonferenza osculatrice** (si parla anche di **cerchio osculatore**).







Se vogliamo il raggio di curvatura della curva c in P, prendiamo un punto A sulla curva prima di P e un punto B sulla stessa curva dopo di P. Facciamo un «processo al limite»: facciamo tendere a zero il valore di AP e di PB, così da avere tre punti distinti, ma prossimi…
Per i tre punti distinti A, P, B così ottenuti passa una e una sola circonferenza, il cui raggio è proprio il raggio di curvatura della curva di partenza c in P.

Raggi principali di curvatura dell’ellissoide

Dato un punto P sull’ellissoide, possiamo definire in esso infiniti raggi di curvatura.

In particolare esistono infiniti piani che contengono la normale all’ellissoide passante per P: ogni piano taglia l’ellissoide generando una curva e tale curva ha un raggio di curvatura in P.

Tar questi infiniti raggi di curvatura in P, due sono detti raggi principali di curvature e prendono il nome di:

Raggio dell’ellisse meridiana passante per P;

Gran normale nel punto P.

Raggio dell’ellisse meridiana

Sia dato un punto P sull’ellissoide.

Il **raggio dell’ellisse meridiana** che passa per il punto P è il raggio di curvatura dell’ellisse in quel punto.

Tale grandezza si indica con ρ.

La formula è:

$$\rho = \frac{a \cdot \left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \cdot \mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{3/2}}$$

Dove φ è la latitudine ed e l’eccentricità.

Gran normale

Dato il punto P sulla superficie dell'ellissoide, si considera il piano che è perpendicolare all'ellisse meridiana e che contiene la normale all'ellissoide in P.

L'intersezione tra questo piano e l'ellissoide genera una curva. Il raggio di curvatura di tale curva nel punto P prende il nome di **gran normale**.

La gran normale si indica solitamente con N.

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{1/2}}$$

dove φ è la latitudine ed e l'eccentricità

Sfera locale

Dato un punto P sull’ellissoide, per un intorno di circa 100-150 km si può sostituire all’ellissoide una sfera per semplificare i calcoli, introducendo errori contenuti, cioè accettabili in alcune applicazioni pratiche.

Tale sfera è detta **sfera locale** ed il raggio è dato da:

$$R' = \sqrt{\rho * N}$$

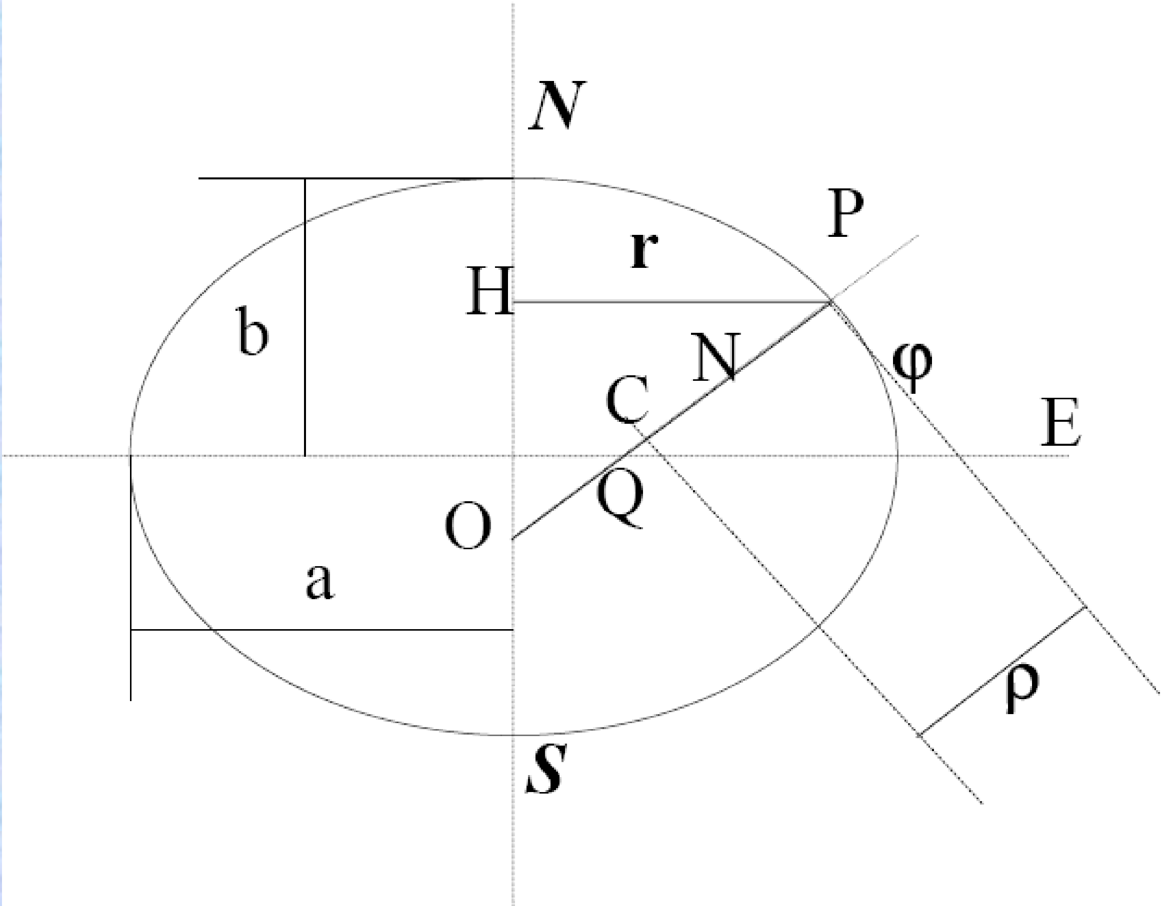
Raggio del parallelo

Il raggio di parallelo si calcola con la formula:

$$r\mathit{p} = N * \cos\varphi$$

essendo N la gran normale e φ la latitudine di riferimento del parallelo.

Ellissoide I



$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\alpha = \frac{a - b}{a}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$r = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^3}}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Ellissoide II

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Equazione dell'ellissoide avente semiasse maggiore **a** e semiasse minore **b**

Raggio del parallelo di latitudine φ

$$r=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}$$

$$\alpha=\frac{a-b}{a}$$

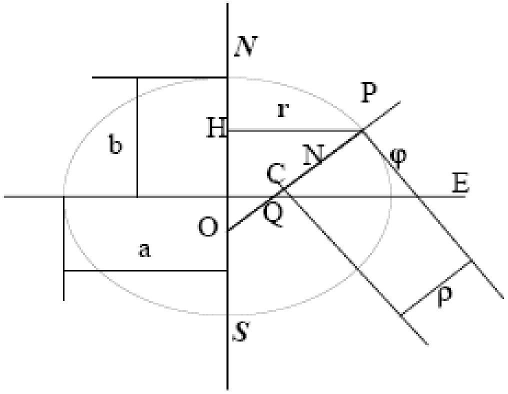
Schiacciamento

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

Eccentricità

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^3}}$$

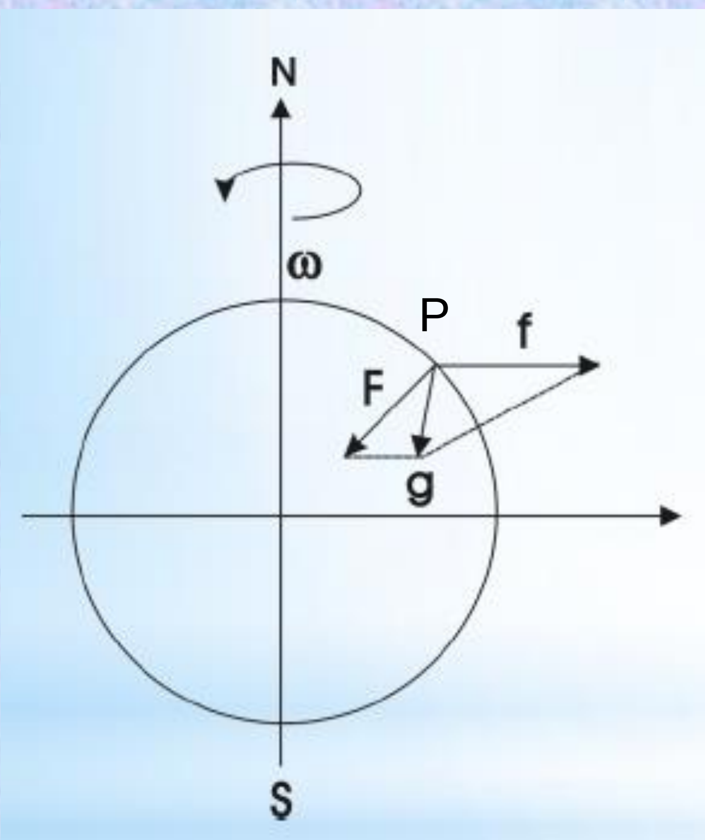
Raggio di curvatura del meridiano, o raggio di curvatura minore (intersezione dell'ellissoide con il piano contenente il meridiano).



Gran Normale, o raggio di curvatura maggiore (intersezione dell'ellissoide con il piano contenente la verticale al punto **P** e ortogonale al piano contenente il meridiano)

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}$$

Il geoide



- m massa del punto P;
- ω velocità angolare;
- r distanza del punto P dall'asse di rotazione;
- G costante di Gravitazione Universale;
- M massa della Terra;
- d distanza del punto P dal centro di massa terrestre.

Qualunque punto P di massa *m* posto sulla superficie terrestre è sottoposto a delle forze, in particolare la **forza centrifuga** e la **forza di attrazione newtoniana (o gravitazionale)**

Forza Centrifuga $$f = ma = m\omega^2 r$$

Forza di Attrazione Gravitazionale $$F = G\frac{mM}{d^2}$$

La risultante delle due forze è detta **forza di gravità**.

Il geoide

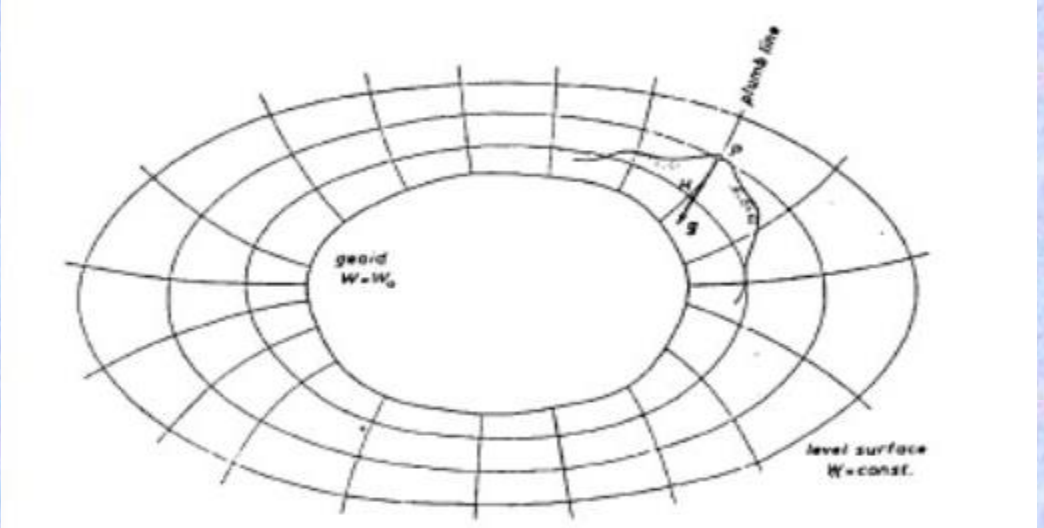
La direzione della forza di gravità è fondamentale nella pratica operativa in quanto definisce **la verticale** passante per il punto. Tale direzione può essere materializzata con il filo a piombo

La direzione della verticale non è una linea retta, ma una linea curva.
Tuttavia per brevi tratti può essere assunta coincidente con una retta.

Il geoide

L’insieme delle linee di forza del campo di gravità definiscono il campo gravitazionale che ammette un *potenziale gravitazionale W*.

W fornisce una serie infinita di superfici, chiamate *equipotenziali*, con la proprietà di avere la verticale in ogni punto normale (cioè perpendicolare) alla superficie stessa.



Il geoide

Supponendo la massa terrestre costituita da un liquido in quiete (assenza d moti e correnti), essa si disporrebbe secondo una delle superfici equipotenziali (*W* costante) scelta in modo da essere passante per un determinato punto in un determinato istante.

Il geoide

Si sceglie, tra le infinite superficie equipotenziali, quella che meglio approssima il livello medio marino.

Supponiamo di estendere il mare (gli oceani) sotto i continenti: la superficie equipotenziale della forza di gravità che si avvicina di più al livello medio del mare prende il nome di geoide.

Il geoide

Il geoide è la superficie che meglio descrive la superficie media degli oceani (a meno dell'influenza di maree, correnti ed effetti meteorologici) e, quindi, la superficie media della Terra.

Esso, infatti, è definibile come la superficie equipotenziale (in cui, cioè, il potenziale della forza di gravità ha valore uguale) che presenta i minimi scostamenti dal livello medio del mare

Il geoide

Si riporta di seguito l'equazione del geoide:
si impone che il potenziale della forza di gravità sia costante.

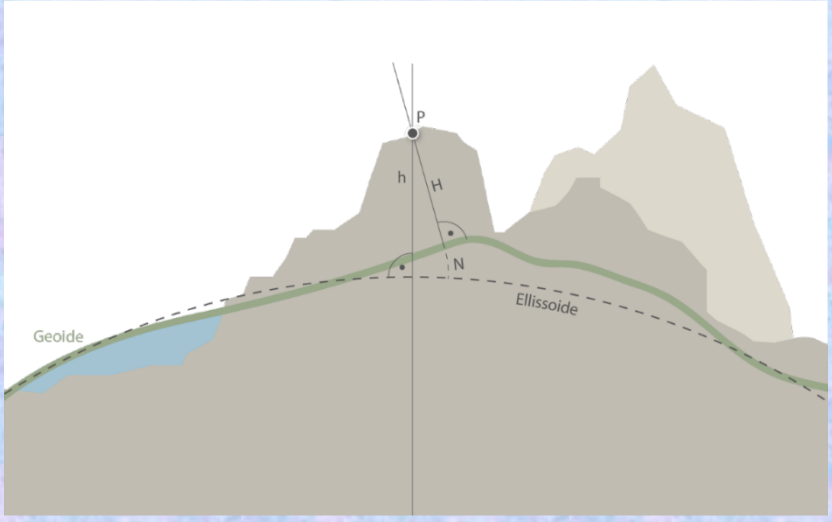
$$W(x, y, z) = \int_T G \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = c$$

Di complessa trattazione analitica perché richiede la conoscenza della legge di distribuzione della massa all'interno della Terra

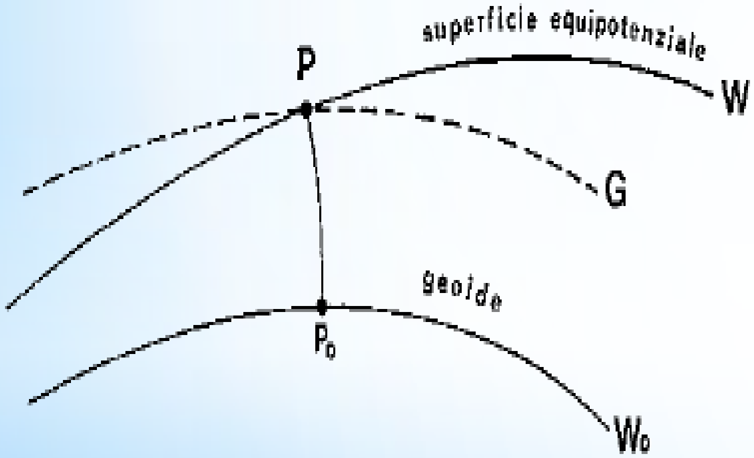
Il geoide

Riepilogando:

Il geoide è la superficie equipotenziale della forza di gravità che meglio approssima la superficie del livello del mare. Per definizione tale figura è, in ogni punto, perpendicolare alla forza di gravità. Il geoide viene preso come riferimento per le quote. Esso estende il livello medio dei mari al di sotto dei continenti.



Quota ortometrica



Quota Ortometrica

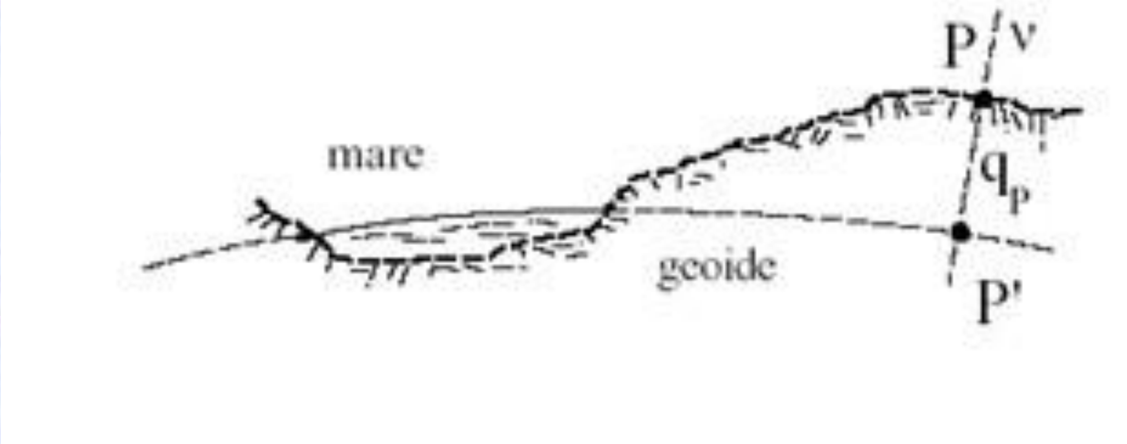
Lunghezza della linea di forza compresa tra la superficie equipotenziale passante per il punto P e il geoide

Il geoide

Il geoide non è esprimibile mediante una equazione matematica di facile risoluzione, come la sfera o l'ellissoide, ma è fisicamente individuabile.

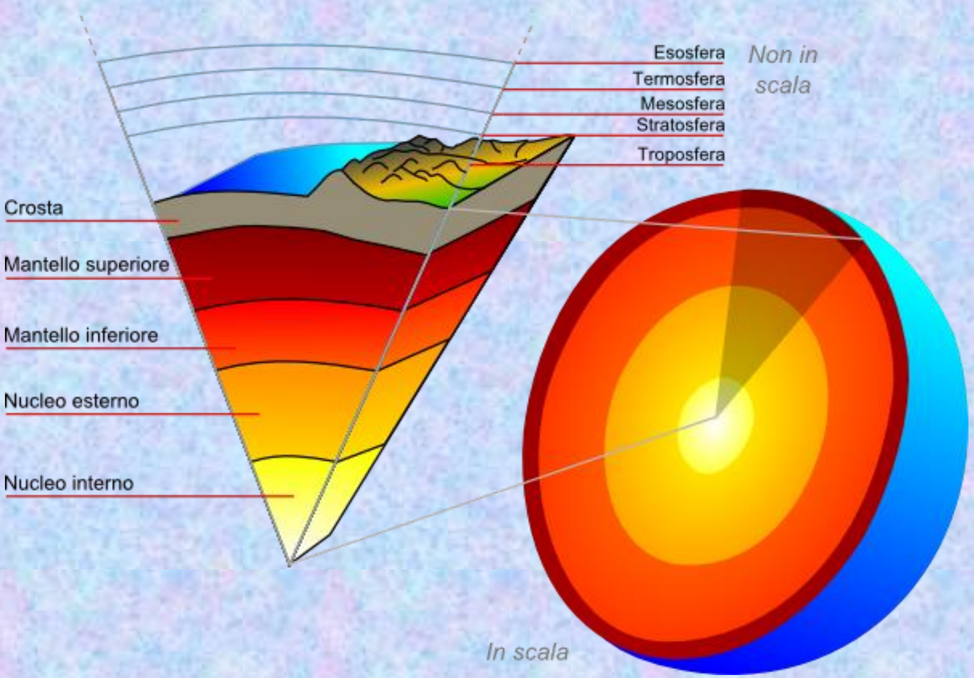
A cosa serve? Come riferimento per le quote che verranno dette quote ortometriche.

Non viene utilizzato per la determinazione della posizione planimetrica (per la planimetria si utilizzano o la sfera o l'ellissoide)



Il geoide

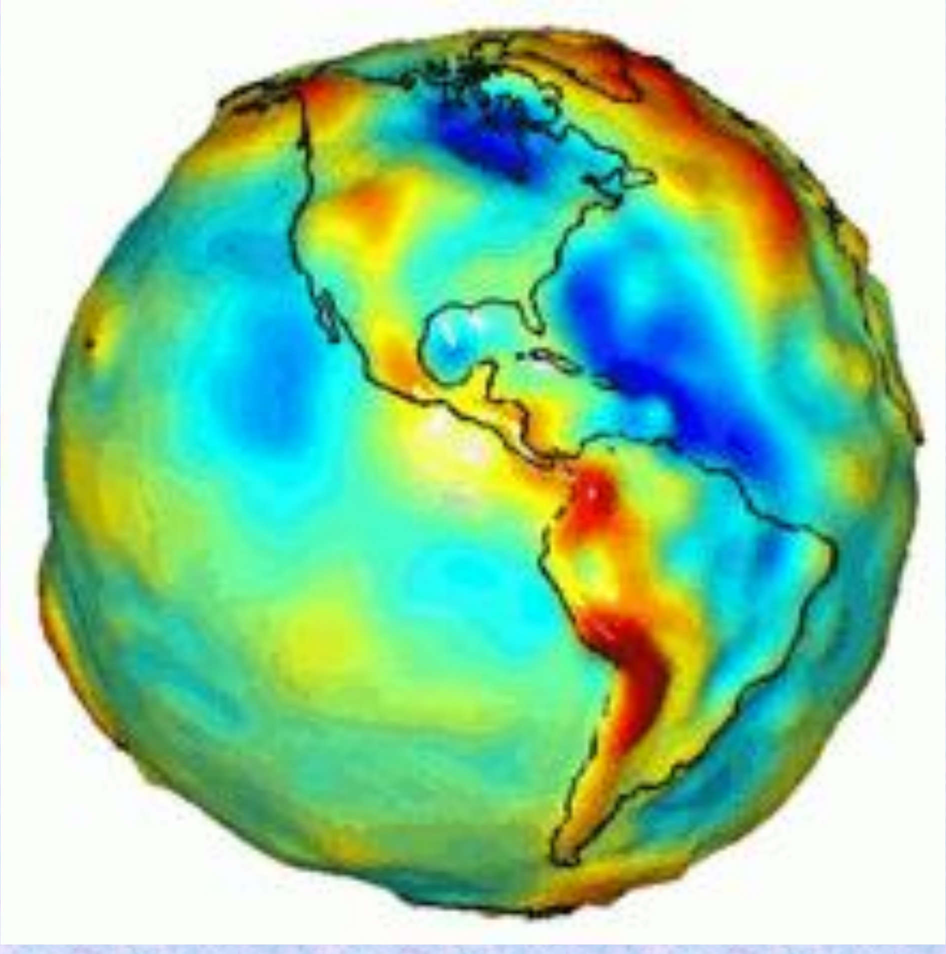
Il Geoide ha una superficie liscia ma relativamente ondulata, poiché, il suo andamento sotto i continenti subisce delle oscillazioni per effetto delle variazioni di densità (e quindi variazioni di gravità); ne consegue, per esempio, che se in un punto la gravità aumenta, il punto di questa superficie geoidica (equipotenziale) deve allontanarsi dal centro di gravità della Terra.



Le ondulazioni del geoide sono comunque contenute in alcune decine di metri

Il geoide

Una rappresentazione falsata del geoide che ne evidenzia la variabilità



Le ondulazioni del geoide sono comunque contenute in alcune decine di metri

Precisazioni

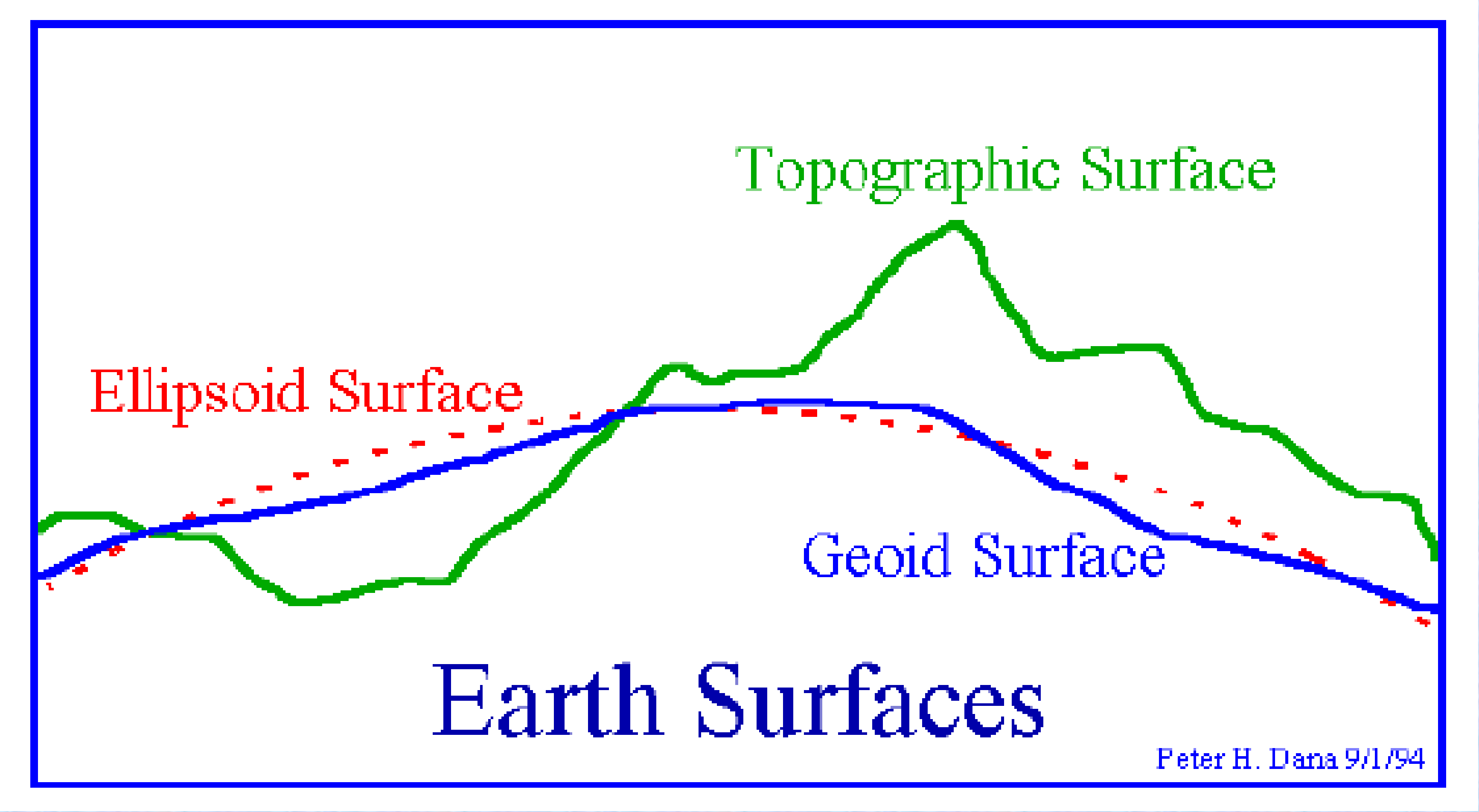
La superficie topografica è quella che effettivamente vediamo.

La superficie geoidica è quella connessa al livello medio marino.

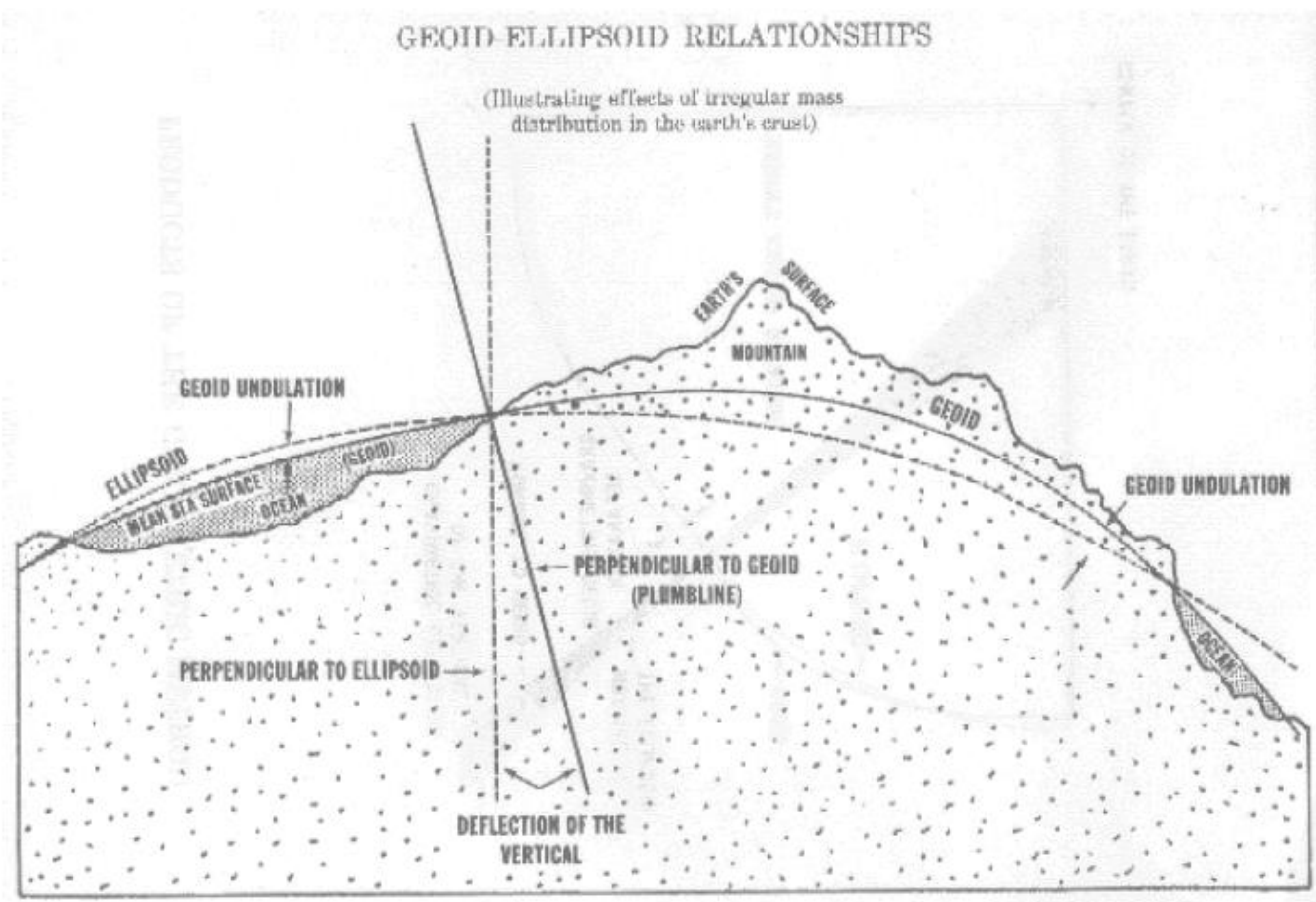
La superficie sferica è un’astrazione matematica che semplifica la forma effettiva della Terra con un modello per il quale si possono utilizzare facili equazioni e formule per svolgere una serie di calcoli (determinazione delle coordinate, delle distanze tra località, delle lunghezze di percorsi).

La superficie ellissoidica è ancora un’astrazione matematica, le cui formule però sono più complesse di quelle della sfera. La capacità di rappresentare l’effettiva forma della Terra è migliore.

Forma della Terra - Confronti



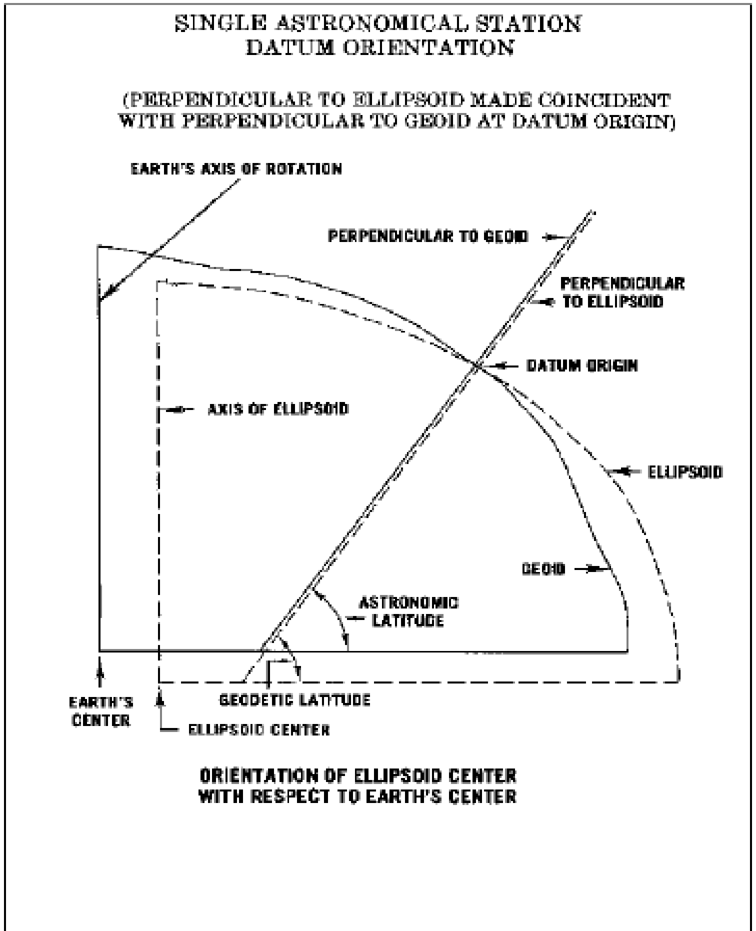
Superfici topografica, geoidica ed ellissoidica



La normale al geoide, detta verticale, coincidente con la direzione del filo a piombo, non necessariamente coincide con la normale ovvero perpendicolare all'ellissoide. L'angolo tra le due normali si chiama deflessione della verticale.

O anche deviazione della verticale

Orientamento ellissoide locale I



L'ellissoide può essere orientato rispetto al geoide in modo che in un certo punto sia garantita la tangenza tra le due superfici e la coincidenza tra la verticale geoidica e la normale ellissoidica (orientamento forte). La cartografia prodotta proiettando sul piano tale superficie ellissoidica risulterà particolarmente affidabile per tutto il territorio circostante il punto di tangenza.

Orientamento ellissoide locale II

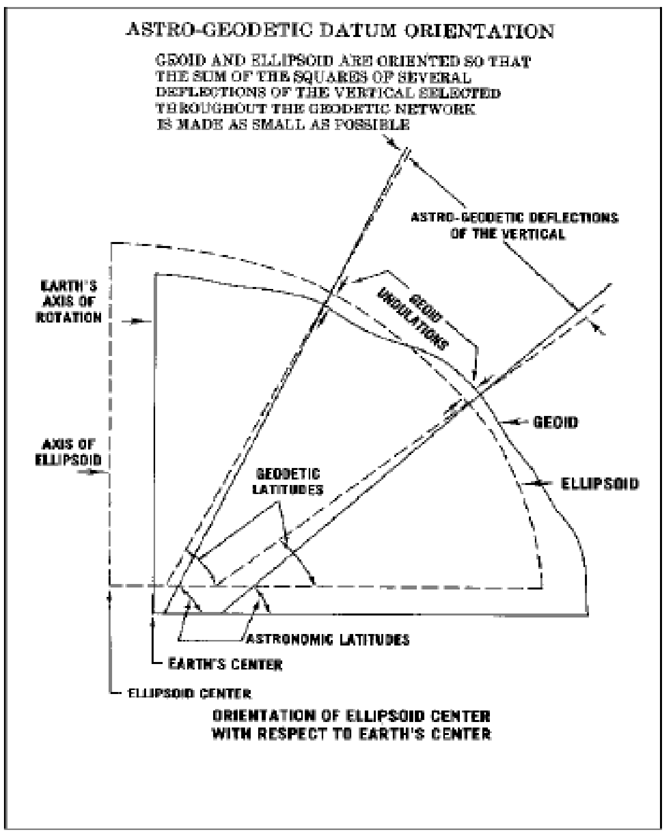
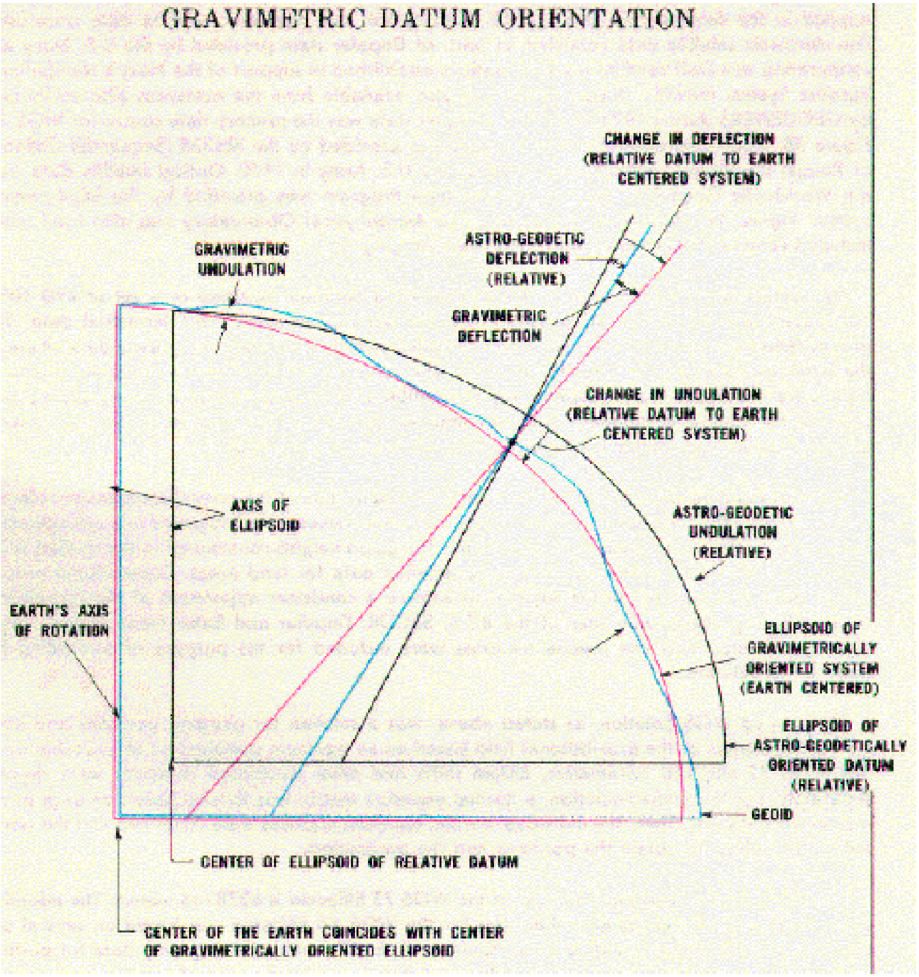


Figure 16

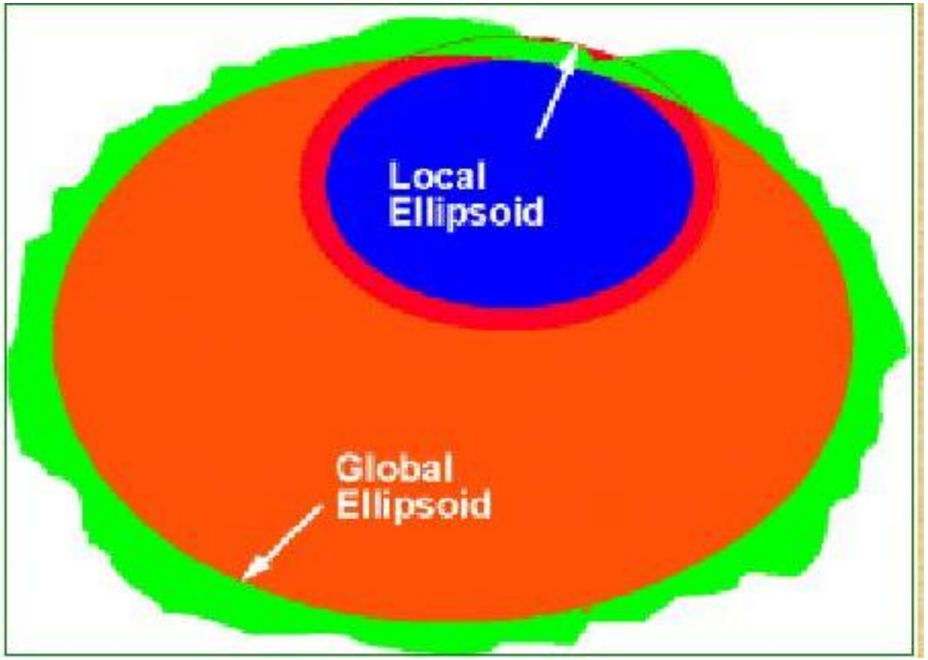
L'ellissoide può essere orientato rispetto al geoide in modo che non vi sia un punto in cui sia garantita la tangenza tra le due superfici, e in cui si abbia la coincidenza tra la verticale geoidica e la normale ellissoidica, ma si abbia piuttosto una posizione reciproca per cui gli scarti tra le due superfici risultino minimi per una vasta estensione di territorio (orientamento debole, o medio). La cartografia prodotta proiettando sul piano tale superficie ellissoidica risulterà sufficientemente affidabile per un vasto territorio circostante il punto di contatto, pur non avendo le caratteristiche di precisione tipiche di un sistema geodetico locale con orientamento forte.

Ellissoide geocentrico



L'ellissoide può essere orientato rispetto al geoide in modo che vi sia coincidenza tra il centro dell'ellissoide ed il centro di massa del geoide, e quindi non sia garantita la tangenza tra le due superfici e non si abbia alcun punto in cui sia imposta la coincidenza tra la verticale geoidica e la verticale ellissoidica. L'ellissoide, geocentrico, risulta il miglior sistema di riferimento per l'intero pianeta (orientamento geocentrico o globale). La cartografia prodotta proiettando sul piano tale superficie ellissoidica non risulterà ottimale, ma consente di disporre di un unico sistema di riferimento per l'intero pianeta. Diventa indispensabile studiare gli scarti tra ellissoide e geoide (ondulazioni).

Confronto ellissoide locale e globale



Geodesia e Cartografia: distinguo

Geodesia: scienza che studia la forma e le dimensioni della Terra e la determinazione dei punti sulla superficie della Terra

Cartografia: scienza che studia la rappresentazione della superficie terrestre, solitamente su di un piano

CARTOGRAFIA

“ La CARTOGRAFIA è l’insieme degli studi , delle operazioni scientifiche , artistiche e tecniche che si svolgono a partire dai risultati delle osservazioni dirette o dalla utilizzazione di una documentazione al fine di elaborare ed allestire carte , piante, ……….” UNESCO 1966

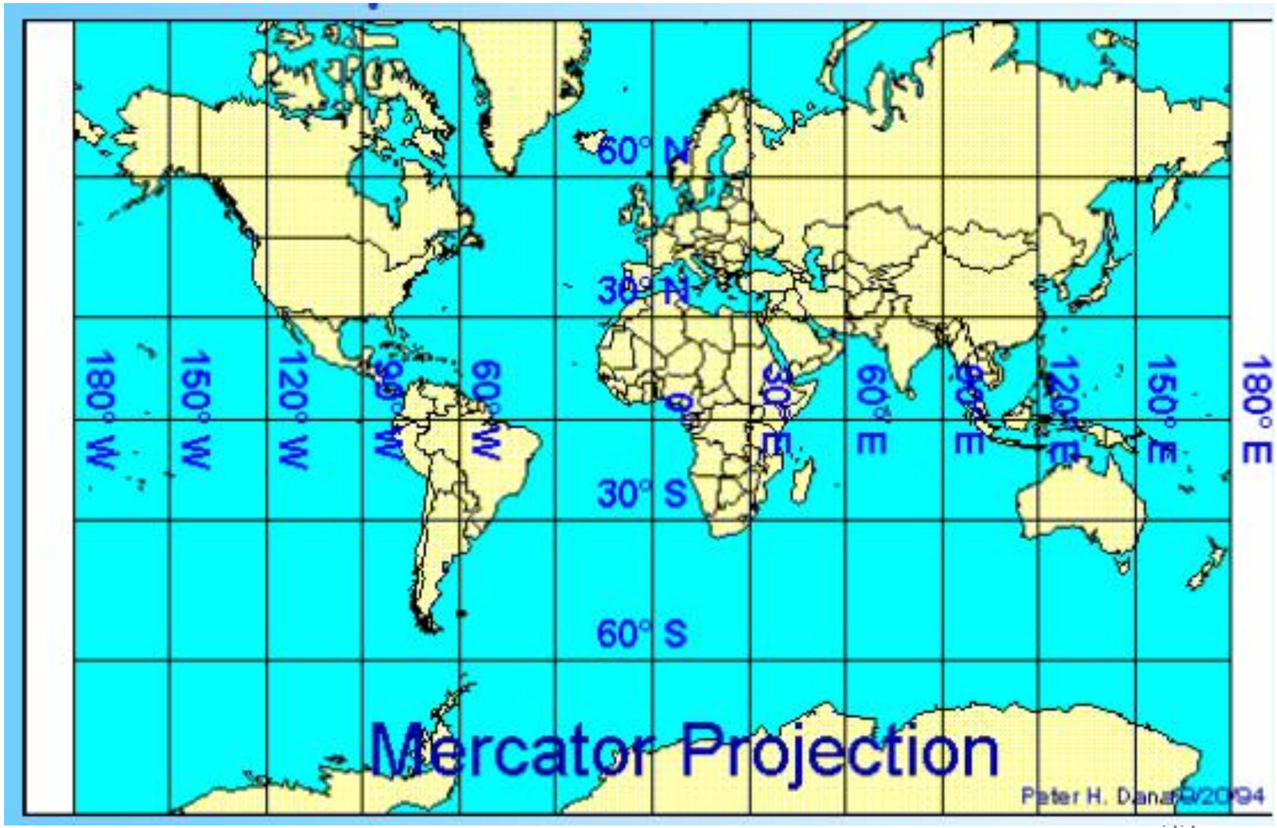
Se consideriamo come oggetto da rappresentare la superficie fisica della terra e con il termine carta un oggetto piano , possiamo anche affermare che :

“ La CARTA è la figura resa in proiezione orizzontale, rimpicciolita , semplificata, completata nel contenuto e dichiarata nei suoi segni, della superficie terrestre o di una sua parte “ E. IMHOF

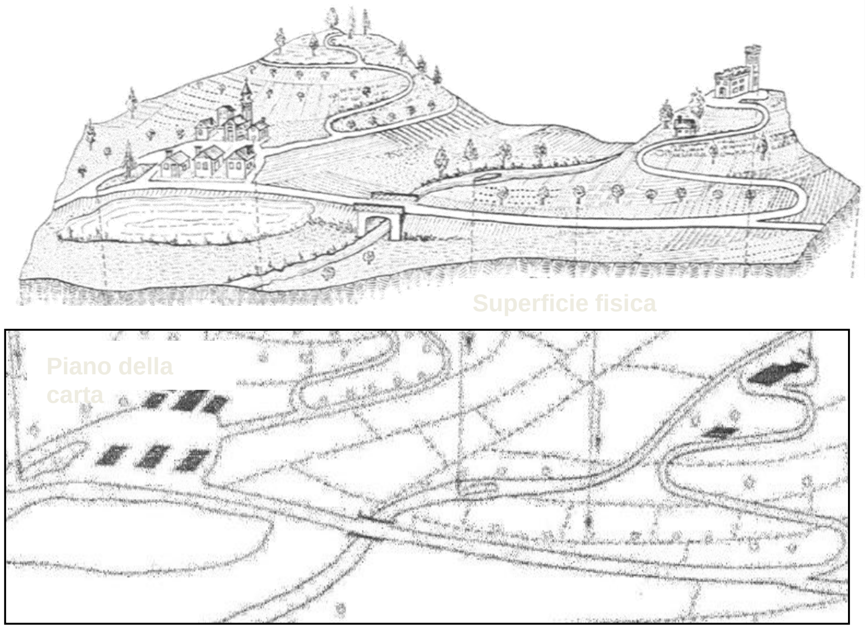
Il problema cartografico

La rappresentazione della superficie terrestre su di un piano genera sempre delle deformazioni.

I paralleli in questa
carta hanno
la stessa lunghezza
dell’equatore:
è evidente che la realtà
è stata deformata



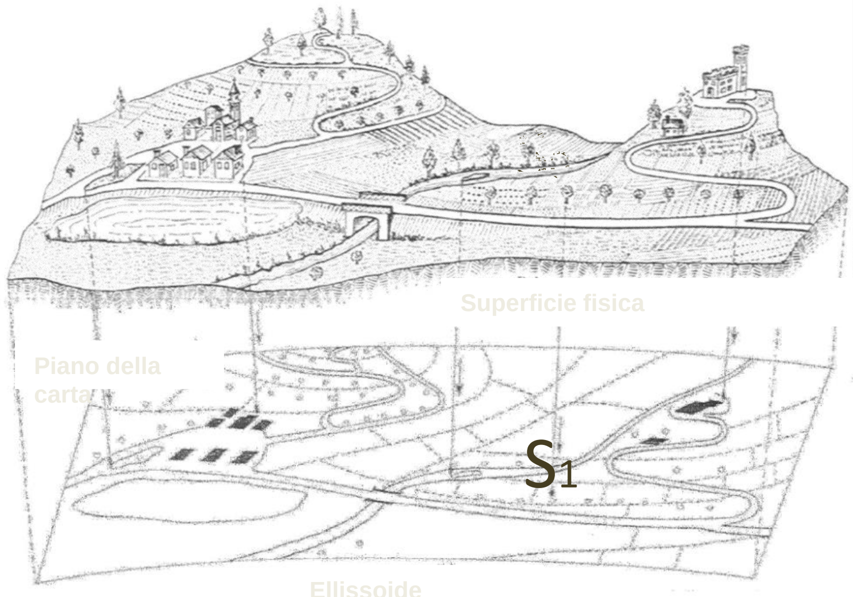
Problema cartografico



Come rappresentiamo la superficie della terra su di un foglio di Carta?

Come si costruisce una Carta?

Problema cartografico



C'è un passaggio intermedio tra la superficie fisica e la carta ed è la proiezione della prima su una superficie regolare (ellissoide o sfera) ;

Poi si costruisce la carta a partire da tale superficie.

Costruire una carta equivale matematicamente a definire una trasformazione regolare tra due superfici S1 e S2

L'ellissoide e la sfera hanno un raggio di curvatura non nullo, per cui non possono essere «distese» sul piano senza introdurre delle deformazioni

LA BASE TEORICA DELLA CARTOGRAFIA

L'ellissoide e la sfera non sono sviluppabili sul piano, e quindi risulta impossibile, sia pure variando in ogni modo possibile la loro configurazione, portarle a giustapporsi su di un piano, ossia farle combaciare, senza che si verifichino "strappi" o "sovrapposizioni".

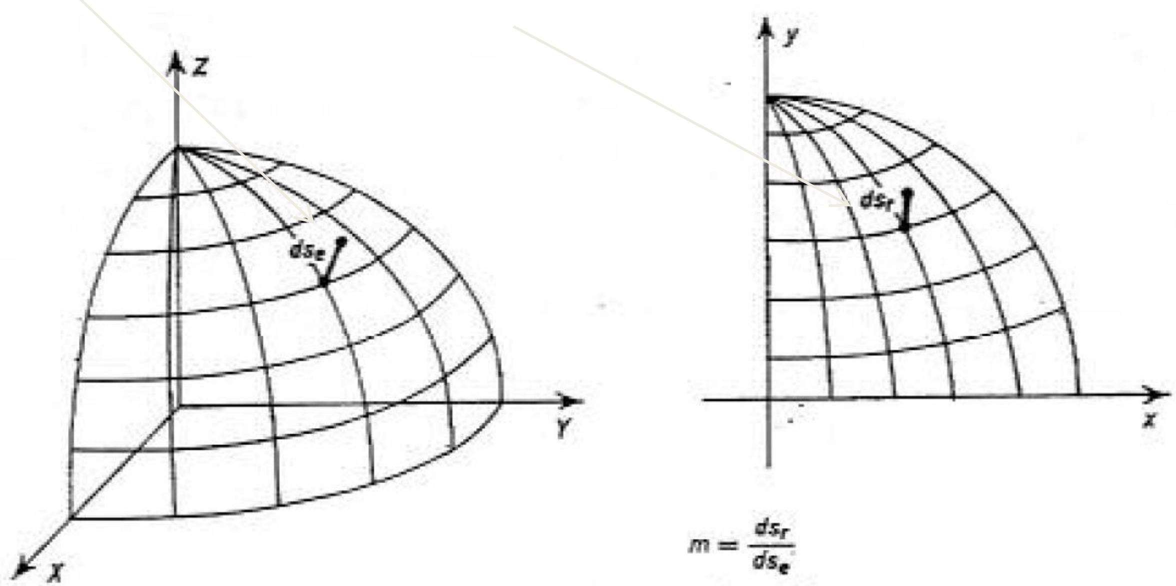
La corrispondenza biunivoca posta alla base della teoria implica che ad ogni punto della superficie di riferimento corrisponda un punto ed uno solo della superficie piana e quindi in conseguenza la superficie di riferimento per trasformarsi sul piano dovrà necessariamente subire dilatazioni o contrazioni oppure dilatazioni in certe zone e contrazioni in altre.

Deformazioni

MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE

Si indichi con ds_e un elemento infinitesimo sull'ellissoide o sulla sfera e e con ds_r il corrispondente nella rappresentazione cartografica. Si definisce modulo di deformazione lineare il rapporto:

$$m_l = \frac{ds_r}{ds_e}$$



Tale rapporto varia sempre da punto a punto della rappresentazione, perché nel caso contrario
si avrebbe una rappresentazione senza deformazioni.

$$m = f(\lambda, \varphi, dir_l)$$

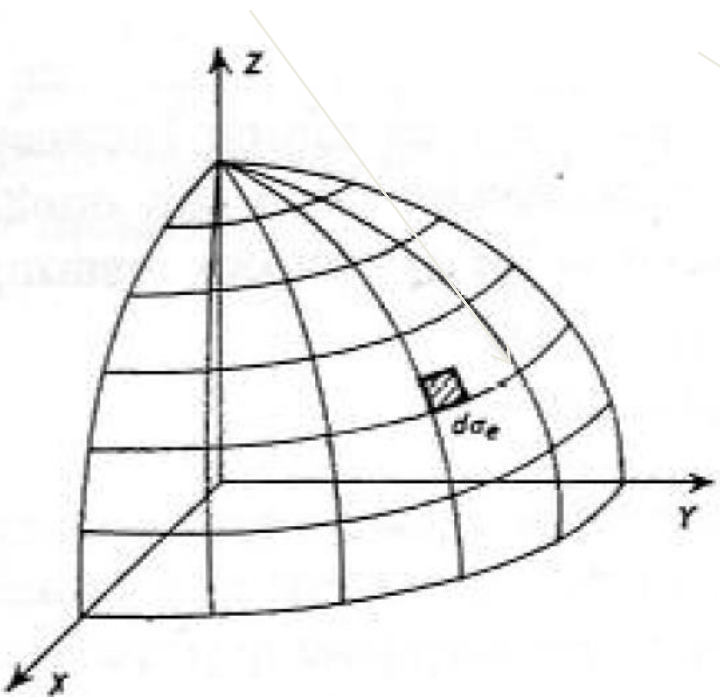
In particolare il modulo di deformazione dipende anche dalla direzione dell'elemento considerato dir_l. In definitiva il modulo di deformazione lineare può avere nel punto più valori, a seconda della direzione considerata uscente dal punto.

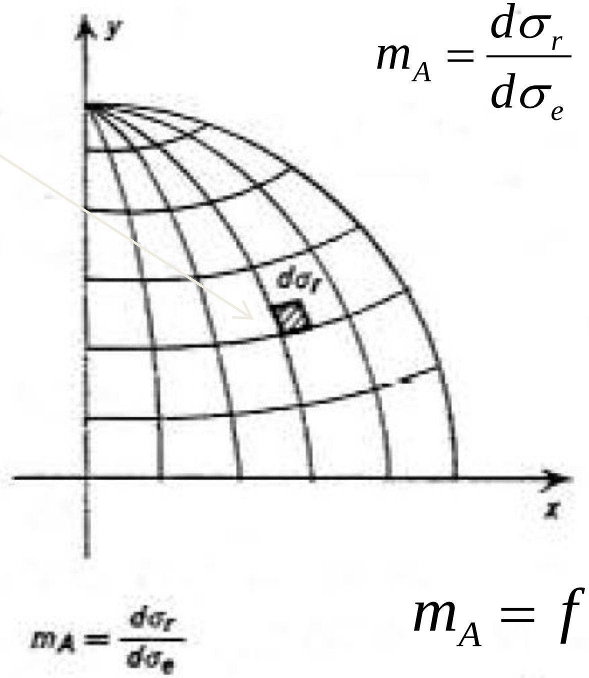
Deformazioni

MODULO DI DEFORMAZIONE AREALE

Si indichi con $d\sigma_e$ un'areola sull'ellissoide o sulla sfera e con $d\sigma_r$ la corrispondente nella rappresentazione cartografica. Si definisce modulo di deformazione areale il rapporto:

$$m_A = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e}$$





$$m_A = f(\lambda, \varphi)$$

Il modulo di deformazione areale dipende solo dalle coordinate (ellissoidiche o sferiche) del punto.

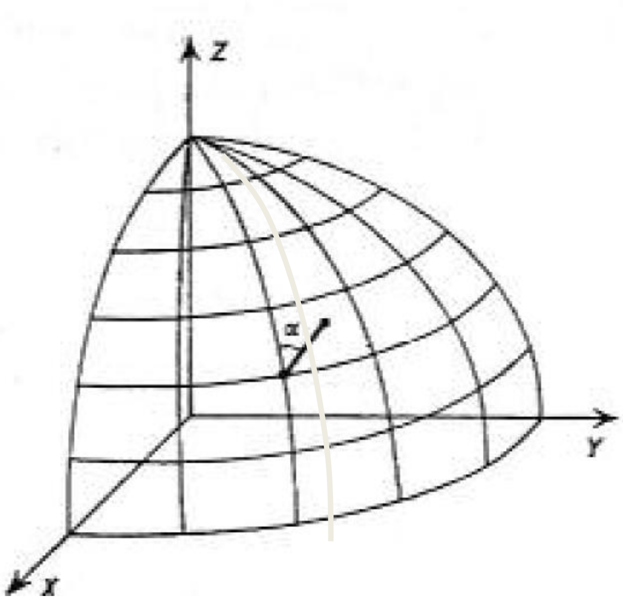
Deformazioni

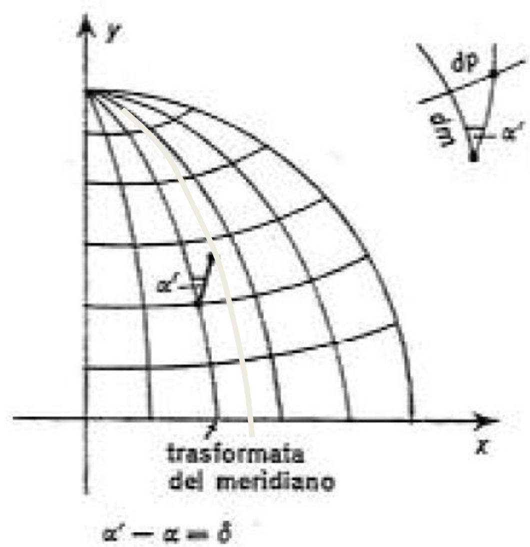
MODULO DI DEFORMAZIONE ANGOLARE

Si consideri l’angolo α compreso tra due direzioni sull'ellissoide (o sulla sfera) e l’angolo α’ che gli corrisponde nella rappresentazione cartografica, ovvero l’angolo che è costituito dalle trasformate delle due direzioni considerate..
Si definisce deformazione angolare la differenza tra i due angoli α e α ‘:

$$m_{\alpha} = (\alpha' - \alpha)$$

$$m_{\alpha} = tg(\delta) = tg(\alpha' - \alpha)$$





$$m_{\alpha} = f(\lambda, \varphi, dir)$$

Il modulo di deformazione angolare dipende dalla direzione.
Dunque il modulo di deformazione angolare può avere in un punto più valori, a seconda delle direzioni uscenti dal punto.

In definitiva, passando dalla teoria (elemento infinitesimo) alla pratica, possiamo fornire le seguenti definizioni semplificate dei 3 moduli.

MODULI DI DEFORMAZIONE

Le deformazioni indotte nel passaggio da SUPERFICIE DI RIFERIMENTO e PIANO DELLA RAPPRESENTAZIONE sono rappresentate da tre coefficienti che prendono il nome di MODULI DI DEFORMAZIONE.

modulo di deformazione lineare : il rapporto fra una la lunghezza di un elemento misurato sulla carta ed il corrispondente elemento misurato sulla superficie di riferimento (m_l)

modulo di deformazione areale : il rapporto fra una superficie misurata sulla carta e la corrispondente misurata sulla superficie di riferimento (m_a)

modulo di deformazione angolare : la differenza fra un angolo misurato sulla carta ed il corrispondente misurato sulla superficie di riferimento (m_α)

CLASSIFICAZIONE DELLE CARTOGRAFIE

In funzione del valore che assume il modulo di deformazione le cartografie possono essere classificate nel seguente modo :

CARTE CONFORMI O ISOGONICHE o ISOGONE per le quali il modulo di deformazione angolare (m_α) vale zero.

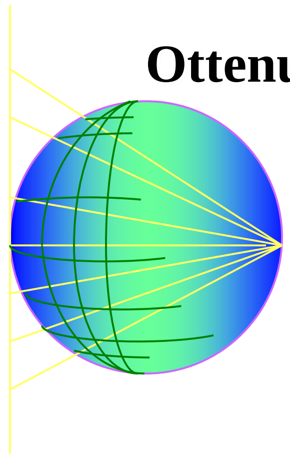
CARTE EQUIVALENTI per le quali il modulo di deformazione areale (m_a) vale 1.

CARTE AFILLATTICHE per le quali i moduli di deformazione lineare (m_l) ed areale (m_a) non sono uguali a 1 ed il modulo di deformazione angolare (m_α) non è uguale a zero, ma comunque, di solito, si cerca di mantenere le deformazioni limitate.

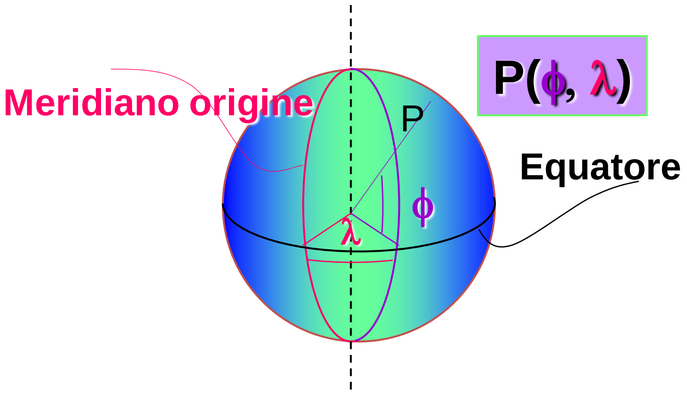
Le carte possono essere **EQUIDISTANTI** ovvero presentare il modulo di deformazione lineare uguale a 1, ma solo lungo alcune direzioni.

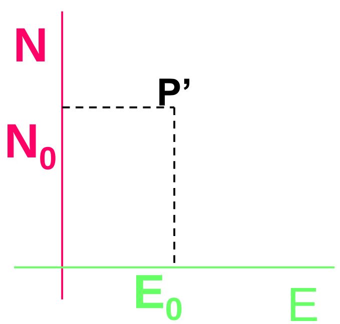
CLASSIFICAZIONE DELLE CARTOGRAFIE

Ottenute geometricamente



Le rappresentazioni cartografiche ottenute con mezzi geometrici sono chiamate anche ***proiezioni*.**





$E = f(\phi, \lambda)$

$N = g(\phi, \lambda)$

Ottenute per via analitica

Le rappresentazioni ottenute usando mezzi analitici svincolando il problema da ogni concetto geometrico proiettivo sono dette ***rappresentazioni analitiche***.

Le rappresentazioni cartografiche che si ottengono intervenendo con mezzi analitici per imporre ad una proiezione cartografica altre caratteristiche, prendono il nome di ***proiezioni modificate.***