Trasformata di Laplace

Filomena Feo

Dipartimento di Ingegneria
Università degli Studi di Napoli ”Parthenope”, Italy

Matematica II - 3 CFU

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

Sia data una funzione $f : I \supset (0, +\infty) \to \mathbb{C}$, dove I è un intervallo.

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

Sia data una funzione $f : I \supset (0, +\infty) \to \mathbb{C}$, dove I è un intervallo.

Definizione

La funzione f si dice $\mathcal{L}$-trasformabile se esiste $s_0 \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $e^{-s_0 t} f(t)$ sia sommabile in $(0, +\infty)$, cioè $\int_0^{+\infty} |e^{-s_0 t} f(t)| \, dt < +\infty$.

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

E' facile dimostrare che se la funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per $s = s_0$ allora è sommabile per $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}s \geq \mathrm{Re}s_0$, ovvero bisogna far veder che

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}s\, t} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

E' facile dimostrare che se la funzione $e^{-st}f(t)$ è sommabile per $s = s_0$ allora è sommabile per $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}s \geq \mathrm{Re}s_0$, ovvero bisogna far veder che

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}f(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}s\,t}|f(t)|\,dt < +\infty.$$

Per dimsotrarlo si procede come segue:

$$\mathrm{Re}s \geq \mathrm{Re}s_0$$

$$\mathrm{Re}s\,t \geq \mathrm{Re}s_0\,t \quad (\text{usando che } t > 0)$$

$$e^{-\mathrm{Re}s\,t} \leq e^{-\mathrm{Re}s_0\,t} \quad (\text{usando la monotonia della funzione reale di variabile reale } e^{-\mathrm{Re}s\,t})$$

$$e^{-\mathrm{Re}s\,t}|f(t)| \leq e^{-\mathrm{Re}s_0\,t}|f(t)| \quad (\text{usando che } |f(t)| \text{ è positiva})$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}f(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}s\,t}|f(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}s_0\,t}|f(t)|\,dt < +\infty$$

usando l'ipotesi che la funzione $e^{-st}f(t)$ è sommabile per $s = s_0$.

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

Di conseguenza $e^{-st}f(t)$ è sommabile in un semipiano di $\mathbb{C}$ con la frontiera parallela all'asse x, cioè individuata da una retta del tipo $x = a$ con $a \in \mathbb{R}$. Resta da capire qual è il più grande di questi semipiani.

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

Di conseguenza $e^{-st}f(t)$ è sommabile in un semipiano di $\mathbb{C}$ con la frontiera parallela all'asse x, cioè individuata da una retta del tipo $x = a$ con $a \in \mathbb{R}$. Resta da capire qual è il più grande di questi semipiani.
E' geometricamente chiaro (fare disegno) che il più grande è quello con a minore. Di conseguenza è naturale definire

$$\sigma[f] = \inf\{\mathrm{Re} s : e^{-st}f(t) \text{ è sommabile in } (0, +\infty)\}$$

$$= \inf\{\mathrm{Re}\, s : \int_0^{+\infty} |e^{-st}f(t)|\, dt < +\infty\}.$$

Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

Di conseguenza $e^{-st}f(t)$ è sommabile in un semipiano di $\mathbb{C}$ con la frontiera parallela all'asse x, cioè individuata da una retta del tipo $x = a$ con $a \in \mathbb{R}$. Resta da capire qual è il più grande di questi semipiani.
E' geometricamente chiaro (fare disegno) che il più grande è quello con a minore. Di conseguenza è naturale definire

$$\sigma[f] = \inf\{\mathrm{Re}\, s : e^{-st}f(t) \text{ è sommabile in } (0, +\infty)\}$$

$$= \inf\{\mathrm{Re}\, s : \int_0^{+\infty} |e^{-st}f(t)|\, dt < +\infty\}.$$

Tale valore è chiamato ascissa di convergenza (ascissa perchè è legato all'ascissa dei punti del piano, convergenza perchè a volte si parla di convergenza dell'integrale).

Trasformata di Laplace: definizione

Se f è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile è possibile dare la seguente definizione.

Definizione

Se f è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile, la sua trasformata di Laplace (unilatera) è la funzione $F : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} s > \sigma[f]\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

E' chiaro che $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > \sigma[f]\}$ è il dominio di F. Nel seguito scriveremo anche $\mathcal{L}[f(t)](s)$ per indicare la Trasformata di Laplace di f.

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re} s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$.

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$. Ne segue che $\sigma[u] = 0$.

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per Re$s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$. Ne segue che $\sigma[u] = 0$.

$$\mathcal{L}[u(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}$$

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per Re$s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$. Ne segue che $\sigma[u] = 0$.

$$\mathcal{L}[u(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per Re$s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$. Ne segue che $\sigma[u] = 0$.

$$\mathcal{L}[u(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

perchè $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-st}}{s} = 0$.

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per Re$s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$. Ne segue che $\sigma[u] = 0$.

$$\mathcal{L}[u(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

perchè $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-st}}{s} = 0$. Infatti $\lim_{t\to+\infty} \left|\frac{e^{-st}}{s}\right| = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}}{|s|} = 0$.

Trasformata di Laplace della funzione gradino di Heavside

Sia $u(t)$ la funzione gradino di Heavside che vale 1 per $t \geq 0$ e vale 0 per $t < 0$. La funzione $e^{-st}u(t)$ in questo caso è sommabile per Re$s > 0$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}u(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}\, dt < \infty$$

se Re $s > 0$. Ne segue che $\sigma[u] = 0$.

$$\mathcal{L}[u(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

perchè $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-st}}{s} = 0$. Infatti $\lim_{t\to+\infty} \left|\frac{e^{-st}}{s}\right| = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-\mathrm{Re}\, s\, t}}{|s|} = 0$.
NOTA BENE: L'ultimo limite è un limite nel campo reale. Si pensi a $\lim_{t\to+\infty} e^{-10t} = 0$, dove il valore 10 é arbitrario.

Osservazione

Poichè nella definizione della trasformata di Laplace non intervengono i valori di $f(t)$ per $t < 0$, d'ora in poi considereremo funzioni che sono nulle per $t < 0$. Per fare ció basta moltiplicare la funzione $f(t)$ per $u(t)$. Le funzioni che sono nulle per $t < 0$ sono dette segnali.

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).
La funzione $f(t)e^{-st}$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{(a-s)t}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s)t}\, dt < \infty$$

se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$.

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).
La funzione $f(t)e^{-st}$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{(a-s)t}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s)t}\, dt < \infty$$

se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$. Ne segue che $\sigma[f] = \mathrm{Re}a$.

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).
La funzione $f(t)e^{-st}$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\,dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}e^{-st}|\,dt = \int_0^{+\infty} |e^{(a-s)t}|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}a-\mathrm{Re}s)t}\,dt < \infty$$

se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$. Ne segue che $\sigma[f] = \mathrm{Re}a$. La Trasformata di Laplace di f è

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \frac{1}{s-a}.$$

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).
La funzione $f(t)e^{-st}$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{(a-s)t}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s)t}\, dt < \infty$$

se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$. Ne segue che $\sigma[f] = \mathrm{Re}a$. La Trasformata di Laplace di f è

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\, dt = \frac{1}{s-a}.$$

Infatti

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\, dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty}$$

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).
La funzione $f(t)e^{-st}$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{(a-s)t}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}a-\mathrm{Re}s)t}\, dt < \infty$$

se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$. Ne segue che $\sigma[f] = \mathrm{Re}a$. La Trasformata di Laplace di f è

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\, dt = \frac{1}{s-a}.$$

Infatti

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\, dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

perchè $\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} = 0$.

Trasformata della funzione esponenziale

Sia $f(t) = e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ (assegnato).
La funzione $f(t)e^{-st}$ in questo caso è sommabile per $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}e^{-st}|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{(a-s)t}|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s)t}\, dt < \infty$$

se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$. Ne segue che $\sigma[f] = \mathrm{Re}a$. La Trasformata di Laplace di f è

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\, dt = \frac{1}{s-a}.$$

Infatti

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\, dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

perchè $\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} = 0$. Per il calcolo di questo limite basta controllare che
$\lim_{t\to\infty} \left|e^{(a-s)t}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{(\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s)t} = 0 \quad$ se $\mathrm{Re}a - \mathrm{Re}s < 0$.

Trasformata della funzione caratteristica di un intervallo

Sia $f(t)$ la funzione caratteristica di un intervallo $[a, b]$ con $0 \leq a < b < +\infty$, cioè la funzione che vale 1 nell'intervallo e zero altrove. La funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ (perchè il suo modulo è nullo fuori dell'intervallo e continuo su un intervallo chiuso e limitato) e quindi $\sigma[f] = -\infty$.

Trasformata della funzione caratteristica di un intervallo

Sia $f(t)$ la funzione caratteristica di un intervallo $[a, b]$ con $0 \leq a < b < +\infty$, cioè la funzione che vale 1 nell'intervallo e zero altrove. La funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ (perchè il suo modulo è nullo fuori dell'intervallo e continuo su un intervallo chiuso e limitato) e quindi $\sigma[f] = -\infty$.

La Trasformata di Laplace di f è

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_a^b e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^b = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s} \quad \text{per } s \neq 0$$

e

$$F(0) := \int_a^b 1\, dt = b - a \quad \text{per } s = 0\ .$$

Trasformata della funzione caratteristica di un intervallo

Sia $f(t)$ la funzione caratteristica di un intervallo $[a, b]$ con $0 \leq a < b < +\infty$, cioè la funzione che vale 1 nell'intervallo e zero altrove. La funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ (perchè il suo modulo è nullo fuori dell'intervallo e continuo su un intervallo chiuso e limitato) e quindi $\sigma[f] = -\infty$.

La Trasformata di Laplace di f è

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_a^b e^{-st}\, dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right]_a^b = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s} \quad \text{per } s \neq 0$$

e

$$F(0) := \int_a^b 1\, dt = b - a \quad \text{per } s = 0\ .$$

Si osservi che la funzione $F(s)$ è continua in $\mathbb{C}$. Infatti

$$\lim_{s\to 0} F(s) = \lim_{s\to 0} \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s} = \lim_{s\to 0} \left[a\frac{e^{-sa} - 1}{as} + b\frac{1 - e^{-sb}}{bs} \right]$$

$$= lim_{s\to 0} \left[(-a)\frac{e^{-sa} - 1}{-as} + b\frac{e^{-sb} - 1}{-bs} \right] = b - a = F(0)$$

Funzione potenza

Sia $f(t) = t^n u(t)$ con $n \in \mathbb{N}$. La funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re} s > 0$ (perchè $e^{-st} t^n u(t)$ è non nulla e continua in $[0, +\infty)$ e va a zero all'infinito più velocemente di tutte le potenze, i.e.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|e^{-st} t^n|}{\frac{1}{|t|^\alpha}} = 0 \tag{1}$$

per ogni $\alpha > 0$) e quindi $\sigma[f] = 0$.

Funzione potenza

Sia $f(t) = t^n u(t)$ con $n \in \mathbb{N}$. La funzione $e^{-st}f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}s > 0$ (perchè $e^{-st}t^n u(t)$ è non nulla e continua in $[0, +\infty)$ e va a zero all'infinito più velocemente di tutte le potenze, i.e.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|e^{-st}t^n|}{\frac{1}{|t|^\alpha}} = 0 \tag{1}$$

per ogni $\alpha > 0$) e quindi $\sigma[f] = 0$.
Consideriamo il caso $n = 1$. Integrando per parti e ricordano la trasformata della funzione gradino di Heavside si ha che

$$\mathcal{L}[tu(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}t\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}t\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\,dt = \frac{\mathcal{L}[u(t)](s)}{s}$$

$$= \frac{1}{s^2} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > 0,$$

perchè

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st}t = 0$$

(infatti $\lim_{t\to+\infty} |e^{-st}t| = \lim_{t\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}st}t = 0$ per $\mathrm{Re}s > 0$).

Funzione potenza

Sia $f(t) = t^n u(t)$ con $n \in \mathbb{N}$. La funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}s > 0$ e quindi $\sigma[f] = 0$.

Abbiamo visto che per $n = 1$, $\mathcal{L}[tu(t)](s) = \frac{1}{s^2}$ per $\mathrm{Re}s > 0$.

Funzione potenza

Sia $f(t) = t^n u(t)$ con $n \in \mathbb{N}$. La funzione $e^{-st} f(t)$ è sommabile per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}s > 0$ e quindi $\sigma[f] = 0$.

Abbiamo visto che per $n = 1$, $\mathcal{L}[tu(t)](s) = \frac{1}{s^2}$ per $\mathrm{Re}s > 0$.

Per $n > 1$, integrando per parti si ha che

$$\mathcal{L}[t^n u(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s} t^n \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{-s} n t^{n-1} \, dt = \frac{n\mathcal{L}[t^{n-1}u(t)](s)}{s}$$

perchè

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st} t^n = 0$$

(infatti $\lim_{t\to+\infty} |e^{-st} t^n| = \lim_{t\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}st} t^n = 0$ per $\mathrm{Re}s > 0$).

Funzione potenza

Per $n = 1$, $\mathcal{L}[tu(t)](s) = \frac{1}{s^2}$ per $\mathrm{Re}s > 0$. Per $n > 1$

$$\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n\mathcal{L}[t^{n-1}u(t)](s)}{s}$$

Funzione potenza

Per $n = 1$, $\mathcal{L}[tu(t)](s) = \frac{1}{s^2}$ per $\mathrm{Re}s > 0$. Per $n > 1$

$$\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n\mathcal{L}[t^{n-1}u(t)](s)}{s}$$

Per $n = 2$

$$\mathcal{L}[t^2 u(t)](s) = \frac{2\mathcal{L}[tu(t)](s)}{s} = \frac{2}{s^3}$$

Funzione potenza

Per $n = 1$, $\mathcal{L}[tu(t)](s) = \frac{1}{s^2}$ per Re$s > 0$. Per $n > 1$

$$\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n\mathcal{L}[t^{n-1}u(t)](s)}{s}$$

Per $n = 2$

$$\mathcal{L}[t^2 u(t)](s) = \frac{2\mathcal{L}[tu(t)](s)}{s} = \frac{2}{s^3}$$

Per $n = 3$

$$\mathcal{L}[t^3 u(t)](s) = \frac{3\mathcal{L}[t^2 u(t)](s)}{s} = \frac{2 \times 3}{s^4} = \frac{3!}{s^4}$$

Ne segue che per $n \geq 1$ si ha che $\mathcal{L}[t^n u(t)](s)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ per Re$s > 0$.

La formula vale anche per $n = 0$.

Linearità

Linearità della trasformata di Laplace

Siano f_1, f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$-trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ la funzione $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per } \operatorname{Re} s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$$

Linearità

Linearità della trasformata di Laplace

Siano f_1, f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$-trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ la funzione $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$$

Dimostrazione

La funzione $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$ perchè bisogna considerare l'intersezione dei due semipiani.

Linearità

Linearità della trasformata di Laplace

Siano f_1, f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$-trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ la funzione $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}\, s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$$

Dimostrazione

La funzione $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$ perchè bisogna considerare l'intersezione dei due semipiani.

La linearità della trasformata di Laplace è conseguenza della linearità dell'integrale. Si veda i dettagli nella dimostrazione della stessa proprietà per la Trasformata di Fourier.

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Come conseguenza di questa proposizione si possono ad esempio calcolare le seguenti trasformate

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re}\, s > 0$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Come conseguenza di questa proposizione si possono ad esempio calcolare le seguenti trasformate

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re}\, s > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Come conseguenza di questa proposizione si possono ad esempio calcolare le seguenti trasformate

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > 0.$$

In particolare

$$\mathcal{L}[\sin t\, u(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\cos t\, u(t)](s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > 0.$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Come conseguenza di questa proposizione si possono ad esempio calcolare le seguenti trasformate

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re} s > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\, u(t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{per } \mathrm{Re} s > 0.$$

In particolare

$$\mathcal{L}[\sin t\, u(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{per } \mathrm{Re} s > 0$$

e

$$\mathcal{L}[\cos t\, u(t)](s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{per } \mathrm{Re} s > 0.$$

Dimostazione. Si osservi che se in $\mathcal{L}[e^{at} u(t)](s) = \frac{1}{s-a}$ per $\mathrm{Re} s > \mathrm{Re} a$ si pone $a = \pm j\omega$ si ha

$$\mathcal{L}[e^{\pm j\omega t} u(t)](s) = \frac{1}{s \mp j\omega} \quad \text{per } \mathrm{Re} s > 0.$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Usando questa formula, la linearitá e le formule di Eulero si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} u(t)\right](s)$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Usando questa formula, la linearitá e le formule di Eulero si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} u(t)\right](s)$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\mathcal{L}\left[e^{j\omega t} u(t)\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t} u(t)\right](s)\right\} = \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right\}$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Usando questa formula, la linearitá e le formule di Eulero si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} u(t)\right](s)$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}u(t)\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}u(t)\right](s)\right\} = \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{s-j\omega-(s+j\omega)}{s^2-j^2\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Trasformata delle funzioni Seno e Coseno

Usando questa formula, la linearitá e le formule di Eulero si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, u(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} u(t)\right](s)$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}u(t)\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}u(t)\right](s)\right\} = \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{s-j\omega-(s+j\omega)}{s^2-j^2\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Esercizio per casa: ricavare la formula per il coseno.

Limitatezza della trasformata

Proposizione (Limitatezza della trasformata)

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\text{Re}s \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\text{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

Limitatezza della trasformata

Proposizione (Limitatezza della trasformata)

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\mathrm{Re}s \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\mathrm{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

Definizione

Una funzione $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è limitata in Ω se il codominio (l'insieme delle immagini) è limitato, cioè esistete una costante positiva C tale che

$$|F(s)| \leq C \quad \forall s \in \Omega.$$

Limitatezza della trasformata

Proposizione (Limitatezza della trasformata)

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\text{Re}s \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\text{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

Definizione

Una funzione $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è limitata in Ω se il codominio (l'insieme delle immagini) è limitato, cioè esistete una costante positiva C tale che

$$|F(s)| \leq C \quad \forall s \in \Omega.$$

dimostrazione solo della limitatezza

Per $\text{Re}s \geq \sigma_0$ si ha

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-st}||f(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\text{Re}s\,t}|f(t)|\,dt$$

Limitatezza della trasformata

Proposizione (Limitatezza della trasformata)

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\mathrm{Re}s \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\mathrm{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

Definizione

Una funzione $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è limitata in Ω se il codominio (l'insieme delle immagini) è limitato, cioè esistete una costante positiva C tale che

$$|F(s)| \leq C \quad \forall s \in \Omega.$$

dimostrazione solo della limitatezza

Per $\mathrm{Re}s \geq \sigma_0$ si ha

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-st}||f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}s\, t}|f(t)|\, dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t}|f(t)|\, dt = C(\sigma_0, f) < +\infty$$

ricordando che la funzione reale di variabile reale $e^{-\mathrm{Re}s\, t}$ è monotona decrescente.

Limitatezza della trasformata

Proposizione (Limitatezza della trasformata)

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\mathrm{Re}s \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\mathrm{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

Limitatezza della trasformata

Proposizione (Limitatezza della trasformata)

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora per ogni $\sigma_0 > \sigma[f]$, la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è limitata nel semipiano chiuso $\text{Re}s \geq \sigma_0$ e

$$\lim_{\text{Re}s \to +\infty} F(s) = 0$$

Significato del limite nella proposizione precedente

Sia $f(t) = u(t)$, allora $F(s) = 1/s$ per $\text{Re}s > 0$. Fissato un $\omega \in \mathbb{R}$, considero la successione $s_n = a_n + j\omega$ con a_n successione reale positivamente divergente. Allora $F(s_n) = \frac{1}{a_n + j\omega} \to 0$. Infatti $|F(s_n)| = \frac{1}{\sqrt{a_n^2 + \omega^2}} \to 0$.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Trasformata di una funzione riscalata, traslata, moltiplicata per un esponenziale

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Trasformata di una funzione riscalata, traslata, moltiplicata per un esponenziale

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.

i) Se $c > 0$, allora

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > c\sigma[f]$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Trasformata di una funzione riscalata, traslata, moltiplicata per un esponenziale

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.

i) Se $c > 0$, allora

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > c\sigma[f]$$

ii)Se $t_0 > 0$, allora

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \sigma[f]$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Trasformata di una funzione riscalata, traslata, moltiplicata per un esponenziale

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.

i) Se $c > 0$, allora

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \text{per Re}s > c\sigma[f]$$

ii)Se $t_0 > 0$, allora

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{per Re}s > \sigma[f]$$

iii) Se $a \in \mathbb{C}$, allora

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \quad \text{per Re}s > \sigma[f] + \text{Re}a$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

Si vedano le analoghe dimostrazioni nel caso delle Trasformata di Fourier.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

Si vedano le analoghe dimostrazioni nel caso delle Trasformata di Fourier.
i) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione riscalata $f(ct)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $c\sigma[f]$.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

Si vedano le analoghe dimostrazioni nel caso delle Trasformata di Fourier.
i) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione riscalata $f(ct)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $c\sigma[f]$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \left|f(ct)e^{-st}\right| \, dt =^{(ct=\tau)} \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} |f(\tau)e^{\frac{s\tau}{c}}| \, d\tau < \infty \quad \text{per } \operatorname{Re}\left(\frac{s}{c}\right) > \sigma[f].$$

Si osservi che $\operatorname{Re}\left(\frac{s}{c}\right) = \frac{\operatorname{Re} s}{c}$ e quindi la relazione precedente vale per $\operatorname{Re} s > c\sigma[f]$ e quindi l'ascissa di convergenza delle funzione $f(ct)$ è $c\sigma[f]$.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

Si vedano le analoghe dimostrazioni nel caso delle Trasformata di Fourier.
i) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione riscalata $f(ct)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $c\sigma[f]$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \left|f(ct)e^{-st}\right| \, dt =^{(ct=\tau)} \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} |f(\tau)e^{\frac{s\tau}{c}}| \, d\tau < \infty \quad \text{per Re}\left(\frac{s}{c}\right) > \sigma[f].$$

Si osservi che $\text{Re}\left(\frac{s}{c}\right) = \frac{\text{Re}\, s}{c}$ e quindi la relazione precedente vale per $\text{Re}\, s > c\sigma[f]$ e quindi l'ascissa di convergenza delle funzione $f(ct)$ è $c\sigma[f]$. Consideriamo $c > 0$ e calcoliamo la trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(ct)](s) = \int_0^{+\infty} f(ct)e^{-st} \, dt =^{(ct=\tau)} \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{s\tau}{c}} \, d\tau = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{c}\right)$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

ii) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione traslata $f(t-t_0)$ con $t_0>0$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

ii) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione traslata $f(t-t_0)$ con $t_0 > 0$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t-t_0)e^{-st} \right| \, dt = \int_{t_0}^{+\infty} \left| f(t-t_0)e^{-st} \right| \, dt$$

$$=^{(t-t_0=\tau)} \int_0^{+\infty} |f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}| \, d\tau = |e^{-s\,t_0}| \int_0^{+\infty} |f(\tau)e^{-s\tau}| \, d\tau < \infty \quad \text{per} \quad \mathrm{Re}s > \sigma[f].$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

ii) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione traslata $f(t-t_0)$ con $t_0>0$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Infatti

$$\int_0^{+\infty}\left|f(t-t_0)e^{-st}\right|\,dt=\int_{t_0}^{+\infty}\left|f(t-t_0)e^{-st}\right|\,dt$$

$$=^{(t-t_0=\tau)}\int_0^{+\infty}|f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}|\,d\tau=|e^{-s\,t_0}|\int_0^{+\infty}|f(\tau)e^{-s\tau}|\,d\tau<\infty\quad\text{per}\quad\operatorname{Re}s>\sigma[f].$$

Calcoliamo la trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s)=\int_0^{+\infty}f(t-t_0)e^{-st}\,dt=\int_{t_0}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

$$=^{(t-t_0=\tau)}\int_0^{+\infty}f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau=e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)]\,(s)\,.$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Dimostrazione

ii) Se $f(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, allora la funzione traslata $f(t-t_0)$ con $t_0>0$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Infatti

$$\int_0^{+\infty}\left|f(t-t_0)e^{-st}\right|\,dt=\int_{t_0}^{+\infty}\left|f(t-t_0)e^{-st}\right|\,dt$$

$$=^{(t-t_0=\tau)}\int_0^{+\infty}|f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}|\,d\tau=|e^{-s\,t_0}|\int_0^{+\infty}|f(\tau)e^{-s\tau}|\,d\tau<\infty\quad \text{per}\quad \operatorname{Re}s>\sigma[f].$$

Calcoliamo la trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s)=\int_0^{+\infty}f(t-t_0)e^{-st}\,dt=\int_{t_0}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

$$=^{(t-t_0=\tau)}\int_0^{+\infty}f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau=e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)]\,(s)\,.$$

La dimostrazione delle iii) è lasciata per esercizio alllo studente.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

1. Calcolare la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo $[a, b]$ con $0 \leq a < b < +\infty$ usando la formula ii) e la trasformata della funzione gradino di Heavside.
2. Calcolare la trasformata di $e^{at}u(t)$ con $a \in \mathbb{C}$ usando la formula iii) e la trasformata della funzione gradino di Heavside.

1. Si osservi che $f(t) = u(t-a) - u(t-b)$ quindi
$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \mathcal{L}[u(t-a) - u(t-b)](s) = \mathcal{L}[u(t-a)](s) - \mathcal{L}[u(t-b)](s)$$
$$=^{ii)} e^{-sa}\mathcal{L}[u(t)](s) - e^{-sb}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$$
per $\mathrm{Re}s > 0$, ricordando che $\mathcal{L}[u(t)](s) = 1/s$ con ascissa di convergenza $\sigma[u] = 0$.
2. $$\mathcal{L}[e^{at}u(t)](s) =^{iii)} \mathcal{L}[u(t)](s-a) = \frac{1}{s-a} \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \mathrm{Re}a,$$
ricordando che $\mathcal{L}[u(t)](s) = 1/s$ con ascissa di convergenza $\sigma[u] = 0$.

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1)$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1) \quad F(s) = e^{-1s}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ e $\sigma[f] = 0$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1) \quad F(s) = e^{-1s}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ e $\sigma[f] = 0$
2. $f(t) = \sin(2t)u(2t)$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1) \quad F(s) = e^{-1s}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ e $\sigma[f] = 0$
2. $f(t) = \sin(2t)u(2t) \quad F(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin(t)u(t)](\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)^2+1} = \ldots$ e $\sigma[f] = 0$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1) \quad F(s) = e^{-1s}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ e $\sigma[f] = 0$
2. $f(t) = \sin(2t)u(2t) \quad F(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin(t)u(t)](\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)^2+1} = \ldots$ e $\sigma[f] = 0$
3. $f(t) = e^{2t}u(t)$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1) \quad F(s) = e^{-1s}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ e $\sigma[f] = 0$
2. $f(t) = \sin(2t)u(2t) \quad F(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin(t)u(t)](\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)^2+1} = \ldots$ e $\sigma[f] = 0$
3. $f(t) = e^{2t}u(t) \quad F(s) = \mathcal{L}[u(t)](s-2) = \frac{1}{s-2}$ e $\sigma[f] = 2$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Esercizi

Calcolare le ascisse di convergenza e le trasformate delle seguenti funzioni:

1. $f(t) = u(t-1) \quad F(s) = e^{-1s}\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$ e $\sigma[f] = 0$
2. $f(t) = \sin(2t)u(2t) \quad F(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin(t)u(t)](\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)^2+1} = \ldots$ e $\sigma[f] = 0$
3. $f(t) = e^{2t}u(t) \quad F(s) = \mathcal{L}[u(t)](s-2) = \frac{1}{s-2}$ e $\sigma[f] = 2$
4. $f(t) = \sin(2t)u(t)$
5. $f(t) = \cos(t/2)u(t/2)$
6. $f(t) = u(t-2) - u(t-1)$
7. $f(t) = e^{jt}u(t)$
8. $f(t) = e^{-j(t-1)}u(t-1)$
9. $f(t) = e^{(1+j)t}u(t)$

Trasformata della convoluzione

Convoluzione di due segnali

Siano f_1 e f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e sommabili.

(2) $$f_1 * f_2(t) = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Trasformata della convoluzione

Convoluzione di due segnali

Siano f_1 e f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e sommabili.

(2) $$f_1 * f_2(t) = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si osservi che $f_1 * f_2(t)$ è un segnale (i.e. f nulla per $t < 0$) se f_1 e f_2 lo sono.

Vedi:convoluzione di segnali

Trasformata della convoluzione

Proposzione

Sia f_1 e f_2 due funzioni complesse di una variabile reale nulle per $t < 0$ e $\mathcal{L}$-trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente. Allora la funzione $f_1 * f_2(t)$ è $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergergenza $\max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$. Inoltre

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2(t)](s) = \mathcal{L}[f_1(t)](s)\mathcal{L}[f_2(t)](s) \quad \text{per } \operatorname{Re} s > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\} \tag{3}$$

(senza dimostrazione)

Trasformata della derivata

Proposzione

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ continua, derivabile e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e con derivata prima continua a tratti e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f']$. Allora

$$(4) \qquad \mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$$

(senza dimostrazione)

Trasformata della derivata

Proposzione

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$ continua, derivabile e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e con derivata prima continua a tratti e $\mathcal{L}$- trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma[f']$. Allora

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\} \tag{4}$$

(senza dimostrazione)

E' possibile applicare tale formula più volte per calcolare la trasformata delle derivate successive se f è sufficientemente regolare.

Esercizio

Scrivere la formula per la derivata seconda, terza, quarta.

Trasformata della derivata

Risoluzione esercizio

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$$

Trasformata della derivata

Risoluzione esercizio

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per Re} s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) \quad \text{per Re} s > \max\{\sigma[f'], \sigma[f'']\}$$

Trasformata della derivata

Risoluzione esercizio

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f'], \sigma[f'']\}$$

quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)](s) &= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) = s\,[s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

per $\mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f'], \sigma[f'']\}$.

Trasformata della derivata

Risoluzione esercizio

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f'], \sigma[f'']\}$$

quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)](s) &= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) = s\left[s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)\right] - f'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

per $\mathrm{Re}s > \max\{\sigma[f], \sigma[f'], \sigma[f'']\}$.

Itrerando si ottengono le formule per la derivata terza e quarta.

Teorema del valore finale

Corollario

Nelle ipotesi della proposizione precedente se esiste $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ ed è finito allora esiste $\lim_{s\to 0} sF(s)$ e

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

(senza dimostrazione)

Funzioni complesse di una variabile complessa

Una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ può essere pensata come funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, quindi sappiamo cosa significa fare un limite e cosa significa che la funzione sia continua (si confronti la parte di corso da 9 CFU fatta con la prof. Betta)

Funzioni complesse di una variabile complessa

Una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ può essere pensata come funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, quindi sappiamo cosa significa fare un limite e cosa significa che la funzione sia continua (si confronti la parte di corso da 9 CFU fatta con la prof. Betta)

Una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è derivabile (nel senso complesso) in s se esiste il limite del rapporto incrementale e

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{F(s + \Delta s) - F(s)}{\Delta s} \in \mathbb{C}.$$

Tale valore è detto derivata di F in s ed è indicato con $F'(s)$.

Funzioni complesse di una variabile complessa

Una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ può essere pensata come funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, quindi sappiamo cosa significa fare un limite e cosa significa che la funzione sia continua (si confronti la parte di corso da 9 CFU fatta con la prof. Betta)

Una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è derivabile (nel senso complesso) in s se esiste il limite del rapporto incrementale e

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{F(s + \Delta s) - F(s)}{\Delta s} \in \mathbb{C}.$$

Tale valore è detto derivata di F in s ed è indicato con $F'(s)$.

Una funzione derivabile nel senso complesso in un insieme Ω è detta olomorfa in Ω.

Vedremo meglio questi concetti nel corso di Metodi matematici per l'Ingegneria.

Derivata della trasformata

Proposizione

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$, $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è olomorfa (derivabile nel senso complesso) nel semipiano $\mathrm{Re}s > \sigma[f]$. La funzione $tf(t)$ è$\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \sigma[f]$$

(senza dimostrazione)

Derivata della trasformata

Proposizione

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$, $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è olomorfa (derivabile nel senso complesso) nel semipiano $\mathrm{Re}s > \sigma[f]$. La funzione $tf(t)$ è$\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \sigma[f]$$

(senza dimostrazione)
La formula si riscrive come

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \sigma[f]$$

Derivata della trasformata

Proposizione

Sia f una funzione complesse di una variabile reale nulla per $t < 0$, $\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ è olomorfa (derivabile nel senso complesso) nel semipiano $\mathrm{Re}s > \sigma[f]$. La funzione $tf(t)$ è$\mathcal{L}$- trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \sigma[f]$$

La precedente proposizione mi garantisce che $tf(t)$ è$\mathcal{L}$- trasformabile e quindi $\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ è olomorfa (derivabile nel senso complesso) , ovvero che $F'(s)$ è olomorfa (derivabile nel senso complesso). Iterando il ragionamento ne segue che la trasformata $F(s)$ ammette tutte le derivate e quindi applicando più volte la formula si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) \quad \text{per } \mathrm{Re}s > \sigma[f]. \tag{5}$$

Esempio

Applicano (5) ricaviamo che la formula a noi già nota $\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
Sia $f(t) = u(t)$, allora $F(s) = 1/s$ con ascissa di convergenza $\sigma[f] = 0$. Applicano (5) si ha

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n u(t)](s) \quad \text{per Re} s > 0.$$

Ricordando che $F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}$ segue

$$(-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n u(t)](s)$$

da cui $\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Formula d'inversione

Di seguito riportiamo alcuni risultati per l'inversione della trasformata, cioè condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata.

Formula d'inversione

Di seguito riportiamo alcuni risultati per l'inversione della trasformata, cioè condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata.

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice regolare a tratti se f e f' sono continue a tratti.

Formula d'inversione

Di seguito riportiamo alcuni risultati per l'inversione della trasformata, cioè condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata.

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice regolare a tratti se f e f' sono continue a tratti.

Proposizione

Sia f un segnale (i.e. f nulla per $t < 0$) regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau \to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau \to t^+} f(\tau)$.

(senza dimostrazione)

Formula d'inversione

Di seguito riportiamo alcuni risultati per l'inversione della trasformata, cioè condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata.

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice regolare a tratti se f e f' sono continue a tratti.

Proposizione

Sia f un segnale (i.e. f nulla per $t < 0$) regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau \to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau \to t^+} f(\tau)$.

(senza dimostrazione)

Si osservi che (vedremo meglio nel corso di Metodi matematici per l'Ingegeneria)

$$v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \lim_{R \to +\infty} \int_{\alpha - jR}^{\alpha + jR} e^{st} F(s)\, ds.$$

Formula d'inversione

Di seguito riportiamo alcuni risultati per l'inversione della trasformata, cioè condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata.

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice regolare a tratti se f e f' sono continue a tratti.

Proposizione

Sia f un segnale (i.e. f nulla per $t < 0$) regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau \to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau \to t^+} f(\tau)$.

(senza dimostrazione)

Si osservi che (vedremo meglio nel corso di Metodi matematici per l'Ingegeneria)

$$v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \lim_{R \to +\infty} \int_{\alpha - jR}^{\alpha + jR} e^{st} F(s)\, ds.$$

Inoltre si dimostra che l'integrale che compare nella formula è indipendente da α.

Formula d'inversione

Proposizione

Sia f un segnale regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau \to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau \to t^+} f(\tau)$.

Formula d'inversione

Proposizione

Sia f un segnale regolare a tratti con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2},$$

dove $f(t^-) = \lim_{\tau \to t^-} f(\tau)$ e $f(t^+) = \lim_{\tau \to t^+} f(\tau)$.

La formula è analoga a quella già vista per la Trasformata di Fourier
Si osservi che l'ipotesi che f sia continua a tratti garantisce che esistono finiti i limiti $f(t^-)$ e $f(t^+)$.
In particolare la formula precedente restituisce il valore $f(t)$ nei punti di continuità della funzione f.

Proposizione

Sia f un segnale regolare a tratti e continuo con trasformata $F(s)$ e ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per ogni $\alpha > \sigma[f]$ si ha

$$\frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds = f(t).$$

Formula d'inversione

Si sottolinea inoltre che nella proposizione precedente le condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata sono date sulla funzione f. Nella prossima proposizione saranno date sulla trasformata.

Proposizione

Sia F una funzione olomorfa nel semipiano $\mathrm{Re}s > \sigma_0$ e tale che

$$|F(s)| = O(1/s^k) \quad \text{per } |s| \to +\infty \tag{6}$$

con $k > 1$. Allora per ogni $\alpha > \sigma_0$ si ha

$$f(t) := \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

definisce un segnale continuo su $\mathbb{R}$ indipendente da α avente F come trasformata.
(senza dimostrazione)

Formula d'inversione

Si sottolinea inoltre che nella proposizione precedente le condizioni sufficienti per poter ricostruire il segnale a partire dalla sua trasformata sono date sulla funzione f. Nella prossima proposizione saranno date sulla trasformata.

Proposizione

Sia F una funzione olomorfa nel semipiano $\mathrm{Re}s > \sigma_0$ e tale che

$$|F(s)| = O(1/s^k) \quad \text{per } |s| \to +\infty \tag{6}$$

con $k > 1$. Allora per ogni $\alpha > \sigma_0$ si ha

$$f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{st}F(s)\,ds$$

definisce un segnale continuo su $\mathbb{R}$ indipendente da α avente F come trasformata. (senza dimostrazione)

Si ricorda che (6) significa

$$\exists\sigma_0, C > 0 \text{ s.t. } |F(s)| \le \frac{C}{|s|^k} \text{ per } |s| > \sigma_0.$$

Si osservi che (6) garantisce che l'integrale $\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{st}F(s)\,ds$ sia finito, quindi non necessita la nozione di integrale nel senso del valor principale.

Legame tra la Trasformata di Laplace e quella di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per $\alpha > \sigma[f]$ poniamo $g(t) = f(t)e^{-\alpha t}u(t)$. Tale funzione è sommabile e quindi ne possiamo fare la trasformata di Fourier.

Legame tra la Trasformata di Laplace e quella di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per $\alpha > \sigma[f]$ poniamo $g(t) = f(t)e^{-\alpha t}u(t)$. Tale funzione è sommabile e quindi ne possiamo fare la trasformata di Fourier. Sia

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

la trasformata di Laplace di $f(t)$, allora la trasformata di Fourier di $g(t)$

Legame tra la Trasformata di Laplace e quella di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per $\alpha > \sigma[f]$ poniamo $g(t) = f(t)e^{-\alpha t}u(t)$. Tale funzione è sommabile e quindi ne possiamo fare la trasformata di Fourier. Sia

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

la trasformata di Laplace di $f(t)$, allora la trasformata di Fourier di $g(t)$

$$G(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} f(t)\, dt = F(\alpha + j\omega)$$

Legame tra la Trasformata di Laplace e quella di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per $\alpha > \sigma[f]$ poniamo $g(t) = f(t)e^{-\alpha t}u(t)$. Tale funzione è sommabile e quindi ne possiamo fare la trasformata di Fourier. Sia

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

la trasformata di Laplace di $f(t)$, allora la trasformata di Fourier di $g(t)$

$$G(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} f(t)\, dt = F(\alpha + j\omega)$$

In conclusione

$$G(\omega) = F(\alpha + j\omega)$$

per $\alpha > \sigma[f]$. Si ricordi che ω è una variabile reale.

Legame tra la Trasformata di Laplace e quella di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Per $\alpha > \sigma[f]$ poniamo $g(t) = f(t)e^{-\alpha t}u(t)$. Tale funzione è sommabile e quindi ne possiamo fare la trasformata di Fourier. Sia

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

la trasformata di Laplace di $f(t)$, allora la trasformata di Fourier di $g(t)$

$$G(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) e^{-\alpha t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} f(t)\,dt = F(\alpha + j\omega)$$

In conclusione

$$G(\omega) = F(\alpha + j\omega)$$

per $\alpha > \sigma[f]$. Si ricordi che ω è una variabile reale.
Inoltre

$$F(s) = G(\mathrm{Im} s)$$

per Re $s > \sigma[f]$.

Teorema fondamentale

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ si scompone in $\mathbb{C}$ in n fattori di primo grado, eventualmente ripetuti.

Teorema fondamentale dell'algebra

Esistono $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ (distinti o no) tali che

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Teorema fondamentale

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ si scompone in $\mathbb{C}$ in n fattori di primo grado, eventualmente ripetuti.

Teorema fondamentale dell'algebra

Esistono $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ (distinti o no) tali che

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

I numeri $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ sono tutte e sole gli zeri (radici) di $P(z)$ (cioè i numeri complessi z tali che $P(z) = 0$).

Teorema fondamentale

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ si scompone in $\mathbb{C}$ in n fattori di primo grado, eventualmente ripetuti.

Teorema fondamentale dell'algebra

Esistono $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ (distinti o no) tali che

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

I numeri $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ sono tutte e sole gli zeri (radici) di $P(z)$ (cioè i numeri complessi z tali che $P(z) = 0$).

Raggruppando gli eventuali polinomi di primo grado $(z - z_j)$ uguali tra loro, risulta

$$P(z) = a_n (z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} \cdots (z - w_k)^{m_k},$$

dove $w_1, \cdots, w_k$ sono gli zeri distinti di $P(z)$ e $m_1 + \cdots + m_k = n$.

Teorema fondamentale

$$P(z) = a_n(z - w_1)^{m_1}(z - w_2)^{m_2} \cdots (z - w_k)^{m_k},$$

dove $w_1, \cdots, w_k$ sono gli zeri distinti di $P(z)$ e $m_1 + ... + m_k = n$. Ciascun m_j e non nullo e si chiama molteplicita dello zero w_j.

Teorema fondamentale

$$P(z) = a_n(z - w_1)^{m_1}(z - w_2)^{m_2} \cdots (z - w_k)^{m_k},$$

dove $w_1, \cdots, w_k$ sono gli zeri distinti di $P(z)$ e $m_1 + ... + m_k = n$. Ciascun m_j e non nullo e si chiama molteplicita dello zero w_j.

Parleremo di zero

- semplice se $m_j = 1$,
- doppia se mj = 2,
- ecc..

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ ha n zeri (distinti o no), se ciascuna è contata con la propria molteplicita. In termini di equazioni, ogni equazione algebrica di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ ha n soluzioni (distinte o no), se ciascuna e contata con la propria molteplicita.

Teorema fondamentale:conseguenze

Se $P(z)$ a coefficienti tutti reali.

- se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una zero di $P(z)$ allora anche $\overline{\alpha}$ lo è e con la stessa molteplicita;

Teorema fondamentale:conseguenze

Se $P(z)$ a coefficienti tutti reali.

- se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una zero di $P(z)$ allora anche $\overline{\alpha}$ lo è e con la stessa molteplicita; Ovvero gli zeri complessi non reali di un polinomio a coefficienti reali si presentano sempre a coppie di complessi coniugati.

Teorema fondamentale:conseguenze

Se $P(z)$ a coefficienti tutti reali.

- se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una zero di $P(z)$ allora anche $\overline{\alpha}$ lo è e con la stessa molteplicita; Ovvero gli zeri complessi non reali di un polinomio a coefficienti reali si presentano sempre a coppie di complessi coniugati.
- se n è dispari, allora $P(z)$ ha almeno uno zero reale;

Teorema fondamentale:conseguenze

Se $P(z)$ a coefficienti tutti reali.

- se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una zero di $P(z)$ allora anche $\overline{\alpha}$ lo è e con la stessa molteplicita; Ovvero gli zeri complessi non reali di un polinomio a coefficienti reali si presentano sempre a coppie di complessi coniugati.
- se n è dispari, allora $P(z)$ ha almeno uno zero reale; Ad esempio un polinomio di grado tre ha sicuramente uno zereo reale e poi a seconda dei casi può avere o altre due zeri complessi coniugati (es.$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$) o due zeri reali distinti (es.$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3)$) o non distinte (es. $z^3 - z^2 - z + 1 = (z-1)^2(z+1)$).
- ogni polinomio a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di polinomi a coefficienti reali di grado 0 (costanti), 1 e 2 con discriminante negativo.

Teorema fondamentale:conseguenze per i polinomi di secondo grado

- $P(z) = z^2 + 1$ discriminante negativo e quindi non si scompone come prodotto di polinomi di primo grado a coefficeienti reali. Naturalmente $P(z) = (z - j)(z + j)$. Il polinomio ha solo zeri complessi non reali coniugati. Tali zeri sono semplici.

Teorema fondamentale:conseguenze per i polinomi di secondo grado

- $P(z) = z^2 + 1$ discriminante negativo e quindi non si scompone come prodotto di polinomi di primo grado a coefficeienti reali. Naturalmente $P(z) = (z - j)(z + j)$. Il polinomio ha solo zeri complessi non reali coniugati. Tali zeri sono semplici.
- $P(z) = z^2 - 1$ ha discriminante positivo e quindi si scompone come prodotto di polinomi di primo grado a coefficeienti reali. In particolare $P(z) = (z - 1)(z + 1)$. Il polinomio ha due zeri reali semplici.

Teorema fondamentale:conseguenze per i polinomi di secondo grado

- $P(z) = z^2 + 1$ discriminante negativo e quindi non si scompone come prodotto di polinomi di primo grado a coefficeienti reali. Naturalmente $P(z) = (z - j)(z + j)$. Il polinomio ha solo zeri complessi non reali coniugati. Tali zeri sono semplici.
- $P(z) = z^2 - 1$ ha discriminante positivo e quindi si scompone come prodotto di polinomi di primo grado a coefficeienti reali. In particolare $P(z) = (z - 1)(z + 1)$. Il polinomio ha due zeri reali semplici.
- $P(z) = z^2 - 2z + 1$ ha discriminante nullo e quindi si scompone come prodotto di due polinomi uguali di primo grado a coefficeienti reali. In particolare $P(z) = (z - 1)^2$. Il polinomio ha uno zero reale doppio.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Di seguito vediamo come antitrasformare funzioni che sono rapporto di polinomi primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con polinomio al denominatore di grado maggiore di quello del numeratore.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Di seguito vediamo come antitrasformare funzioni che sono rapporto di polinomi primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con polinomio al denominatore di grado maggiore di quello del numeratore.

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado $N \in \mathbb{N}$, i.e. $B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ con $b_n \neq 0$, e al numeratore un polinomio di grado $M \in \mathbb{N}$ con $N > M$ e

- CASO 1: $B(s)$ ha solo zeri reali semplici.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Di seguito vediamo come antitrasformare funzioni che sono rapporto di polinomi primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con polinomio al denominatore di grado maggiore di quello del numeratore.

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado $N \in \mathbb{N}$, i.e. $B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ con $b_n \neq 0$, e al numeratore un polinomio di grado $M \in \mathbb{N}$ con $N > M$ e

- CASO 1: $B(s)$ ha solo zeri reali semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_N$ gli zeri reali semplici, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1) \cdots + (s - s_N)$ con $b_N \neq 0$. Allora

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{\Lambda_N}{s - s_N}$$

per opportune costanti $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_N$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Di seguito vediamo come antitrasformare funzioni che sono rapporto di polinomi primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con polinomio al denominatore di grado maggiore di quello del numeratore.

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado $N \in \mathbb{N}$, i.e. $B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ con $b_n \neq 0$, e al numeratore un polinomio di grado $M \in \mathbb{N}$ con $N > M$ e

- CASO 1: $B(s)$ ha solo zeri reali semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_N$ gli zeri reali semplici, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1)\cdots + (s - s_N)$ con $b_N \neq 0$. Allora

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{\Lambda_N}{s - s_N}$$

per opportune costanti $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_N$. Ricordando $\mathcal{L}[e^{at}u(t)](s) = \frac{1}{s-a}$ per $a \in \mathbb{C}$, si ha

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 e^{s_1 t} + \cdots + \Lambda_N e^{s_N t}].$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Di seguito vediamo come antitrasformare funzioni che sono rapporto di polinomi primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con polinomio al denominatore di grado maggiore di quello del numeratore.

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado $N \in \mathbb{N}$, i.e. $B(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ con $b_n \neq 0$, e al numeratore un polinomio di grado $M \in \mathbb{N}$ con $N > M$ e

- CASO 1: $B(s)$ ha solo zeri reali semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_N$ gli zeri reali semplici, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1)\cdots + (s - s_N)$ con $b_N \neq 0$. Allora

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{\Lambda_N}{s - s_N}$$

per opportune costanti $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_N$. Ricordando $\mathcal{L}[e^{at}u(t)](s) = \frac{1}{s-a}$ per $a \in \mathbb{C}$, si ha

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 e^{s_1 t} + \cdots + \Lambda_N e^{s_N t}].$$

Per il calcolo dei cefficienti abbiamo tre metodi

1. $$\Lambda_i = \lim_{s \to s_i} \frac{A(s)}{B(s)}(s - s_i)$$
2. $$\Lambda_i = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=s_i}$$
3. principio d'identità dei polinomi

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

Si ha che $A(s) = 1$, $B(s) = s^2 - 5s + 6$, $M = 0$, $N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha due zeri reali semplici: 2 e 3. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-3}$ e quindi

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

Si ha che $A(s) = 1$, $B(s) = s^2 - 5s + 6$, $M = 0$, $N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha due zeri reali semplici: 2 e 3. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-3}$ e quindi

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 e^{2t} + \Lambda_2 e^{3t}].$$

Per il calcolo delle costsnti si possono usare le seguenti formule:

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 2} \frac{A(s)}{B(s)}(s-2) = \lim_{s\to 2} \frac{1}{s-3} = -1$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 3} \frac{A(s)}{B(s)}(s-3) = \lim_{s\to 3} \frac{1}{s-2} = 1$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

Si ha che $A(s) = 1$, $B(s) = s^2 - 5s + 6$, $M = 0$, $N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha due zeri reali semplici: 2 e 3. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.
Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-3}$ e quindi

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 e^{2t} + \Lambda_2 e^{3t}].$$

Per il calcolo delle costsnti si possono usare le seguenti formule:

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 2} \frac{A(s)}{B(s)}(s-2) = \lim_{s\to 2} \frac{1}{s-3} = -1$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 3} \frac{A(s)}{B(s)}(s-3) = \lim_{s\to 3} \frac{1}{s-2} = 1$$

$$f(t) = u(t)[-1e^{2t} + 1e^{3t}]$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Si osservi che Λ_1, Λ_2 si possono calcolare anche usando l'altra formula

$$\Lambda_1 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=2} = \left.\frac{1}{2s-5}\right|_{s=2} = -1$$

$$\Lambda_2 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=3} = \left.\frac{1}{2s-5}\right|_{s=3} = 1$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Si osservi che Λ_1, Λ_2 si possono calcolare anche usando l'altra formula

$$\Lambda_1 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=2} = \left.\frac{1}{2s-5}\right|_{s=2} = -1$$

$$\Lambda_2 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=3} = \left.\frac{1}{2s-5}\right|_{s=3} = 1$$

Si osservi infine che Λ_1, Λ_2 si possono calcolare anche con il principio di identità dei polinomi.

$$\frac{1}{s^2-5s+6} = \frac{\Lambda_1}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-3}$$

$$\frac{1}{s^2-5s+6} = \frac{\Lambda_1(s-3)+\Lambda_2(s-2)}{s^2-5s+6}$$

da cui segue che

$$\Lambda_1(s-3)+\Lambda_2(s-2) = 1$$

ovvero

$$\begin{cases} \Lambda_1 + \Lambda_2 = 0 \\ -3\Lambda_1 - 2\Lambda_2 = 1 \end{cases}$$

da cui $\Lambda_1 = -1, \Lambda_2 = 1$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 - 7s^2 + 10s}$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 - 7s^2 + 10s}$$

Si ha che $A(s) = s+1$, $B(s) = s^3 - 7s^2 + 10s$, $M = 1$, $N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice ,-1, e $B(s)$ ha tre zeri reali semplici: 0,2 e 5. Gli zeri di $A(s)$ non sono zeri di $B(s)$ e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1}{s} + \frac{\Lambda_2}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-5}$ e

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 + \Lambda_2 e^{2t} + \Lambda_3 e^{5t}].$$

Le costanti si calcolano con le seguenti formule

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)}{B(s)}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{(s-2)(s-5)} = 1/10$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 2} \frac{A(s)}{B(s)}(s-2) = \lim_{s\to 2} \frac{s+1}{s(s-5)} = -1/2$$

$$\Lambda_3 = \lim_{s\to 5} \frac{A(s)}{B(s)}(s-5) = \lim_{s\to 5} \frac{s+1}{s(s-2)} = 2/5$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 - 7s^2 + 10s}$$

Si ha che $A(s) = s + 1$, $B(s) = s^3 - 7s^2 + 10s$, $M = 1$, $N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice ,-1, e $B(s)$ ha tre zeri reali semplici: 0,2 e 5. Gli zeri di $A(s)$ non sono zeri di $B(s)$ e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1}{s} + \frac{\Lambda_2}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-5}$ e

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 + \Lambda_2 e^{2t} + \Lambda_3 e^{5t}].$$

Le costanti si calcolano con le seguenti formule

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)}{B(s)}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{(s-2)(s-5)} = 1/10$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 2} \frac{A(s)}{B(s)}(s-2) = \lim_{s\to 2} \frac{s+1}{s(s-5)} = -1/2$$

$$\Lambda_3 = \lim_{s\to 5} \frac{A(s)}{B(s)}(s-5) = \lim_{s\to 5} \frac{s+1}{s(s-2)} = 2/5$$

In conclusione

$$f(t) = u(t)\left[\frac{1}{10} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{5t}\right].$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: caso zeri reali semplici al denominatore

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 - 7s^2 + 10s}$$

Si ha che $A(s) = s + 1$, $B(s) = s^3 - 7s^2 + 10s$, $M = 1$, $N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice ,-1, e $B(s)$ ha tre zeri reali semplici: 0,2 e 5. Gli zeri di $A(s)$ non sono zeri di $B(s)$ e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1}{s} + \frac{\Lambda_2}{s-2} + \frac{\Lambda_2}{s-5}$ e

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 + \Lambda_2 e^{2t} + \Lambda_3 e^{5t}].$$

Le costanti si calcolano con le seguenti formule

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)}{B(s)}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{(s-2)(s-5)} = 1/10$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 2} \frac{A(s)}{B(s)}(s-2) = \lim_{s\to 2} \frac{s+1}{s(s-5)} = -1/2$$

$$\Lambda_3 = \lim_{s\to 5} \frac{A(s)}{B(s)}(s-5) = \lim_{s\to 5} \frac{s+1}{s(s-2)} = 2/5$$

In conclusione

$$f(t) = u(t)\left[\frac{1}{10} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{5t}\right].$$

Per il calcolo delle costanti possiamo usare anche l'altra formula o il principio di identità dei polinomi (esercizio lasciato allo studente)

Antitrasformata di rapporti di polinomi:esercizi per casa

Antitrasformare le seguenti funzioni:

- $F(S) = \frac{1}{s^2-7s+12}$
- $F(S) = \frac{-2}{s^2-7s+12}$
- $F(S) = \frac{s}{s^2-7s+12}$
- $F(S) = \frac{s-7}{s^2-7s+12}$
- $F(S) = \frac{1}{s^2-5s-6}$
- $F(S) = \frac{1}{s^3-5s^2+6s}$
- $F(S) = \frac{2s+3}{s^3-5s^2+6s}$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 2: $B(s)$ ha zeri reali ma non tutti semplici.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 2: $B(s)$ ha zeri reali ma non tutti semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_r$ gli $r \in \mathbb{N}$ zeri reali con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_r$ con $N = m_1 + \cdots + m_r$, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_r)^{m_r}$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 2: $B(s)$ ha zeri reali ma non tutti semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_r$ gli $r \in \mathbb{N}$ zeri reali con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_r$ con $N = m_1 + \cdots + m_r$, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_r)^{m_r}$.
Allora

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1^1}{s - s_1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{\Lambda_1^{m_1}}{(s - s_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{\Lambda_r^1}{s - s_r} + \cdots + \frac{\Lambda_r^{m_r}}{(s - s_r)^{m_r}},$$

con opportune costanti Λ_i^j con $i = 1, \cdots, r$ e $j = 1, \cdots, m_i$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 2: $B(s)$ ha zeri reali ma non tutti semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_r$ gli $r \in \mathbb{N}$ zeri reali con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_r$ con $N = m_1 + \cdots + m_r$, i.e. $B(s) = b_N(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_r)^{m_r}$.
Allora

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1^1}{s - s_1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{\Lambda_1^{m_1}}{(s - s_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{\Lambda_r^1}{s - s_r} + \cdots + \frac{\Lambda_r^{m_r}}{(s - s_r)^{m_r}},$$

con opportune costanti Λ_i^j con $i = 1, \cdots, r$ e $j = 1, \cdots, m_i$. Ricordando $\mathcal{L}[e^{at}t^n u(t)](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ per $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, si ha

$$f(t) = u(t)\left[\Lambda_1^1 e^{s_1 t} + \cdots + \Lambda_1^{m_1}\frac{t^{m_1 - 1}e^{s_1 t}}{(m_1 - 1)!} + \cdots + \Lambda_r^1 e^{s_r t} + \cdots + \Lambda_r^{m_r}\frac{t^{m_r - 1}e^{s_r t}}{(m_r - 1)!}\right]$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 2: $B(s)$ ha zeri reali ma non tutti semplici.

Siano $s_1, s_2, \cdots, s_r$ gli $r \in \mathbb{N}$ zeri reali con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_r$ con $N = m_1 + \cdots + m_r$, i.e. $B(s) = b_N (s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_r)^{m_r}$.
Allora

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\Lambda_1^1}{s - s_1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{\Lambda_1^{m_1}}{(s - s_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{\Lambda_r^1}{s - s_r} + \cdots + \frac{\Lambda_r^{m_r}}{(s - s_r)^{m_r}},$$

con opportune costanti Λ_i^j con $i = 1, \cdots, r$ e $j = 1, \cdots, m_i$. Ricordando $\mathcal{L}[e^{at} t^n u(t)](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ per $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, si ha

$$f(t) = u(t) \left[\Lambda_1^1 e^{s_1 t} + \cdots + \Lambda_1^{m_1} \frac{t^{m_1 - 1} e^{s_1 t}}{(m_1 - 1)!} + \cdots + \Lambda_r^1 e^{s_r t} + \cdots + \Lambda_r^{m_r} \frac{t^{m_r - 1} e^{s_r t}}{(m_r - 1)!} \right]$$

Le costanti si calcolano con la seguente formula:

$$\Lambda_i^j = \lim_{s \to s_i} \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} \left[\frac{A(s)}{B(s)} (s - s_i)^{m_i} \right].$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

$$\frac{1}{s-a} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow} \quad e^{at}u(t)$$

$$\frac{1}{(s-a)^2} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \frac{e^{at}tu(t)}{1!}$$

$$\frac{1}{(s-a)^3} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \frac{e^{at}t^2u(t)}{2!}$$

$$\frac{1}{(s-a)^4} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \frac{e^{at}t^3u(t)}{3!}$$

$$\cdots$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: denominatore con solo zeri reali ma almeno uno non è semplice

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: denominatore con solo zeri reali ma almeno uno non è semplice

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$$

Si ha che $A(s) = s$, $B(s) = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$, $M = 1$, $N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due: 1. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Antitrasformata di rapporti di polinomi: denominatore con solo zeri reali ma almeno uno non è semplice

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$$

Si ha che $A(s) = s, B(s) = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2, M = 1, N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due: 1. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1^1}{s-1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s-1)^2}$ e

$$\Lambda_1^1 = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s-1)^2\right] = \lim_{s\to 1} 1 = 1$$

$$\Lambda_1^2 = \lim_{s\to 1} \frac{A(s)}{B(s)}(s-1)^2 = \lim_{s\to 1} s = 1$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: denominatore con solo zeri reali ma almeno uno non è semplice

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$$

Si ha che $A(s) = s$, $B(s) = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$, $M = 1$, $N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due: 1. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1^1}{s-1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s-1)^2}$ e

$$\Lambda_1^1 = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s-1)^2\right] = \lim_{s\to 1} 1 = 1$$

$$\Lambda_1^2 = \lim_{s\to 1} \frac{A(s)}{B(s)}(s-1)^2 = \lim_{s\to 1} s = 1$$

$$f(t) = u(t)[e^t + te^t]$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi: denominatore con solo zeri reali ma almeno uno non è semplice

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$$

Si ha che $A(s) = s, B(s) = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2, M = 1, N = 2$. $A(s)$ non ha zeri e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due: 1. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1^1}{s-1} + \frac{\Lambda_1^2}{(s-1)^2}$ e

$$\Lambda_1^1 = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s-1)^2\right] = \lim_{s\to 1} 1 = 1$$

$$\Lambda_1^2 = \lim_{s\to 1} \frac{A(s)}{B(s)}(s-1)^2 = \lim_{s\to 1} s = 1$$

$$f(t) = u(t)[e^t + te^t]$$

Per il calcolo delle costanti possiamo usare anche il principio di identità dei polinomi.

Antitrasformata di rapporti di polinomi:radici reali non semplici

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3+6s^2+9s}$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi:radici reali non semplici

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3+6s^2+9s}$$

Si ha che $A(s) = s-1, B(s) = s^3+6s^2+9s = s(s+3)^2, M = 1, N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice, 1, e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due, -3, ed uno zero semplice, 0. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Antitrasformata di rapporti di polinomi:radici reali non semplici

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3+6s^2+9s}$$

Si ha che $A(s) = s-1, B(s) = s^3+6s^2+9s = s(s+3)^2, M = 1, N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice, 1, e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due, -3, ed uno zero semplice, 0. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1^1}{s+3} + \frac{\Lambda_1^2}{(s+3)^2} + \frac{\Lambda_2}{s}$ e

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1^1 e^{-3t} + \Lambda_1^2 t e^{-3t} + \Lambda_2]$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi:radici reali non semplici

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3+6s^2+9s}$$

Si ha che $A(s) = s-1$, $B(s) = s^3+6s^2+9s = s(s+3)^2$, $M = 1$, $N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice, 1, e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due, -3, ed uno zero semplice, 0. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1^1}{s+3} + \frac{\Lambda_1^2}{(s+3)^2} + \frac{\Lambda_2}{s}$ e

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1^1 e^{-3t} + \Lambda_1^2 te^{-3t} + \Lambda_2]$$

I coefficienti si calcolano con la formula

$$\Lambda_1^1 = \lim_{s\to-3} \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s+3)^2\right] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{s-1}{s}\right] = \lim_{s\to-3}\frac{1}{s^2} = 1/9$$

$$\Lambda_1^2 = \lim_{s\to-3}\frac{A(s)}{B(s)}(s+3)^2 = \lim_{s\to-3}\frac{s-1}{s} = 4/3$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 0}\frac{A(s)}{B(s)}s = \lim_{s\to 0}\frac{s-1}{(s+3)^2} = -1/9$$

e quindi

$$f(t) = u(t)\left[\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{4}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}\right]$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi:radici reali non semplici

Antitrasformare:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3+6s^2+9s}$$

Si ha che $A(s) = s-1$, $B(s) = s^3+6s^2+9s = s(s+3)^2$, $M = 1$, $N = 3$. $A(s)$ ha uno zero reale semplice, 1, e $B(s)$ ha uno zero reale con molteplicità due, -3, ed uno zero semplice, 0. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $F(s) = \frac{\Lambda_1^1}{s+3} + \frac{\Lambda_1^2}{(s+3)^2} + \frac{\Lambda_2}{s}$ e

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1^1 e^{-3t} + \Lambda_1^2 t e^{-3t} + \Lambda_2]$$

I coefficienti si calcolano con la formula

$$\Lambda_1^1 = \lim_{s\to -3} \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s)}{B(s)}(s+3)^2\right] = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[\frac{s-1}{s}\right] = \lim_{s\to -3} \frac{1}{s^2} = 1/9$$

$$\Lambda_1^2 = \lim_{s\to -3} \frac{A(s)}{B(s)}(s+3)^2 = \lim_{s\to -3} \frac{s-1}{s} = 4/3$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)}{B(s)} s = \lim_{s\to 0} \frac{s-1}{(s+3)^2} = -1/9$$

e quindi

$$f(t) = u(t)\left[\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{4}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}\right]$$

Per il calcolo delle costanti possiamo usare anche il principio di identità dei polinomi.

Antitrasformata di rapporti di polinomi:esercizi per casa

Antitrasformare le seguenti funzioni:

- $F(S) = \frac{1}{s^2+2s+1}$
- $F(S) = \frac{-2}{s^2-8s+16}$
- $F(S) = \frac{s+3}{s^3+2s^2+s}$
- $F(S) = \frac{s-7}{s^4+2s^3+s^2}$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 3: $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Invece di dare una formula generale mostriamo come procedere con un esempio.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 3: $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Invece di dare una formula generale mostriamo come procedere con un esempio.

Sia $F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5}$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- CASO 3: $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Invece di dare una formula generale mostriamo come procedere con un esempio.

Sia $F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5}$.

Ricordando che il denominatore ha due zeri complessi semplici $-1 \pm 2j$, si ha

$$F(s) = \frac{\Lambda_1}{s+1+2j} + \frac{\Lambda_2}{s+1-2j},$$

dove

$$\Lambda_i = \lim_{s \to s_i} \frac{A(s)}{B(s)}(s - s_i)$$

oppure

$$\Lambda_i = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=s_i}$$

per $i = 1, 2$. Segue che

$$f(t) = u(t)[\Lambda_1 e^{(-1-2j)t} + \Lambda_2 e^{(-1+2j)t}]$$

con $\Lambda_1 = 1 - 1/2j, \Lambda_2 = 1 + 1/2j$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Segue che

$$f(t) = u(t)[(1 - 1/2j)e^{(-1-2j)t} + (1 + 1/2j)e^{(-1+2j)t}]$$

$$= u(t)e^{-t}\left[(1 - 1/2j)\left(\cos(2t) - j\sin(2t)\right) + (1 + 1/2j)\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right)\right]$$

per le formule di Eulero.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Segue che

$$f(t) = u(t)[(1 - 1/2j)e^{(-1-2j)t} + (1 + 1/2j)e^{(-1+2j)t}]$$

$$= u(t)e^{-t}\left[(1 - 1/2j)\left(\cos(2t) - j\sin(2t)\right) + (1 + 1/2j)\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right)\right]$$

per le formule di Eulero.

Nel caso di radici complesse di $B(s)$ si consiglia di procedere come proposto nelle slides successive usando le trasformate notevoli di seno e coseno.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Segue che

$$f(t) = u(t)[(1 - 1/2j)e^{(-1-2j)t} + (1 + 1/2j)e^{(-1+2j)t}]$$

$$= u(t)e^{-t}\left[(1 - 1/2j)\left(\cos(2t) - j\sin(2t)\right) + (1 + 1/2j)\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right)\right]$$

per le formule di Eulero.

Nel caso di radici complesse di $B(s)$ si consiglia di procedere come proposto nelle slides successive usando le trasformate notevoli di seno e coseno.
Facendo i conti segue che

$$f(t) = u(t)e^{-t}[2\cos(2t) - \sin(2t)].$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+1}$.
Si osservi che

$$F(s) = 2\frac{s}{s^2+1} + 3\frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+1}$.
Si osservi che

$$F(s) = 2\frac{s}{s^2+1} + 3\frac{1}{s^2+1}$$

Ricordando le trasformate $\mathcal{L}[\cos(t)](s) = \frac{s}{s^2+1}$ e $\mathcal{L}[\sin(t)](s) = \frac{1}{s^2+1}$ si ha:

$$f(t) = [2\cos t + 3\sin t]u(t)$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$.
Si osservi che

$$F(s) = 2\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{2}\frac{2}{s^2+4}$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$.
Si osservi che

$$F(s) = 2\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{2}\frac{2}{s^2+4}$$

Ricordando le trasformate $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ e $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ si ha:

$$f(t) = \left[2\cos(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t)\right] u(t)$$

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5}$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5}$.
Osservando

$$F(s) = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - 2\frac{1}{(s+1)^2+2^2}$$
$$= 2\left.\frac{\sigma}{\sigma^2+2^2}\right|_{\sigma=s+1} - 2\left.\frac{1}{\sigma^2+2^2}\right|_{\sigma=s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right](t) = 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sigma}{\sigma^2+2^2}\right](t) - e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\sigma^2+2^2}\right](t)$$

segue che

$$f(t) = u(t)e^{-t}[2\cos(2t) - \sin(2t)],$$

ricordando che $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ e $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{-3s}{s^2+2s+10}$.

Antitrasformata di rapporti di polinomi

Sia $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ primi tra di loro (non hanno zeri comuni) con al denominatore un polinomio di grado N e al numeratore un polinomio di grado M con $N > M$ e

- $B(s)$ ha zeri complessi semplici.

Sia $F(s) = \frac{-3s}{s^2+2s+10}$.
Osservando

$$F(s) = -3\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + 3\frac{1}{(s+1)^2+3^2}$$

$$= -3\left.\frac{\sigma}{\sigma^2+3^2}\right|_{\sigma=s+1} + 3\left.\frac{1}{\sigma^2+3^2}\right|_{\sigma=s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = -3e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sigma}{\sigma^2+3^2}\right](t) + e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{\sigma^2+3^2}\right](t)$$

segue che

$$f(t) = u(t)e^{-t}[-3\cos(3t)+\sin(3t)],$$

ricordando che $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ e $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Applicazione della trasformata di Laplace alle equazioni differenziali

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} y(t) \text{ verifica un'equazione} \\ \text{differenziale} \end{array}} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d] & \boxed{\begin{array}{c} Y(s) \text{ verifica un'equazione} \\ \text{algebrica} \end{array}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Soluzione } y(t)} & \boxed{\text{Soluzione } Y(s)} \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Problema di Cauchy

Si consideri inoltre il seguente problema di Cauchy

(P) $$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema di Cauchy

Si consideri inoltre il seguente problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) = sY(s) - y_0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy_0 - y_1$$

allora

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y_1 + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + as + b) = y_0(s + a) + y_1$$

da cui

$$Y(s) = \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b}$$

che sappiamo antitrasformare.

Problema di Cauchy

Si consideri inoltre il seguente problema di Cauchy

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) = sY(s) - y_0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy_0 - y_1$$

allora

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y_1 + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + as + b) = y_0(s + a) + y_1$$

da cui

$$Y(s) = \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b}$$

che sappiamo antitrasformare.

Si osservi che $s^2 + as + b$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale linerare.

Problema di Cauchy

Si consideri inoltre il seguente problema di Cauchy

$$(P)\qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) = sY(s) - y_0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - y'(0) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - sy_0 - y_1$$

allora

$$s^2Y(s) - sy(0) - y_1 + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + as + b) = y_0(s + a) + y_1$$

da cui

$$Y(s) = \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b}$$

che sappiamo antitrasformare.

Si osservi che $s^2 + as + b$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale linerare.

La risoluzione del problema di Cauchy si traduce nel risolvere l'equazione algebrica $Y(s)(s^2 + as + b) = y_0(s + a) + y_1$.

Problema di Cauchy

Si consideri inoltre il seguente problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) = sY(s) - y_0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy_0 - y_1$$

allora

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y_1 + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + as + b) = y_0(s + a) + y_1$$

da cui

$$Y(s) = \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b}$$

che sappiamo antitrasformare.

Si osservi che $s^2 + as + b$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale linerare.

La risoluzione del problema di Cauchy si traduce nel risolvere l'equazione algebrica $Y(s)(s^2 + as + b) = y_0(s + a) + y_1$.

Si osservi che con questo metodo si trova la soluzione del problema di Cauchy per $t > 0$.

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - 0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - 1 = s^2 Y(s) - 1$$

allora

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = 0$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - 0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - 1 = s^2 Y(s) - 1$$

allora

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = 1$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - 0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - 1 = s^2 Y(s) - 1$$

allora

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - 0$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - 1 = s^2 Y(s) - 1$$

allora

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 1) Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

e quindi $y(t) = u(t) \sin t$.

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ricordando che

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - 1$$

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - 0 = s^2 Y(s) - s$$

allora

$$s^2 Y(s) - s + sY(s) - 1 - 2Y(s) = 0$$

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = s + 1$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2 + s - 2}.$$

Applichiamo ora quanto visto per l'antitrasformata del rapporto di polinomi.

Esempio

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2}$$

Si ha che $A(s) = s+1, B(s) = s^2+s-2, M = 1, N = 2$. $A(s)$ ha un unico zero reale, -1, e $B(s)$ ha due zeri reali semplici: 1 e -2. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.

Allora $Y(s) = \frac{\Lambda_1}{s-1} + \frac{\Lambda_2}{s+2}$ e

$$y(t) = u(t)[\Lambda_1 e^t + \Lambda_2 e^{-2t}]$$

Esempio

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2}$$

Si ha che $A(s) = s+1, B(s) = s^2+s-2, M = 1, N = 2$. $A(s)$ ha un unico zero reale, -1, e $B(s)$ ha due zeri reali semplici: 1 e -2. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.
Allora $Y(s) = \frac{\Lambda_1}{s-1} + \frac{\Lambda_2}{s+2}$ e

$$y(t) = u(t)[\Lambda_1 e^t + \Lambda_2 e^{-2t}]$$

Le costanti si calcolano come segue

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 1} Y(s)(s-1) = \lim_{s\to 1} \frac{s+1}{s+2} = 2/3$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to -2} Y(s)(s+2) = \lim_{s\to -2} \frac{s+1}{s-1} = 1/3$$

Esempio

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2}$$

Si ha che $A(s) = s+1, B(s) = s^2+s-2, M = 1, N = 2$. $A(s)$ ha un unico zero reale, -1, e $B(s)$ ha due zeri reali semplici: 1 e -2. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ non hanno zeri in comune e quindi sono primi tra di loro.
Allora $Y(s) = \frac{\Lambda_1}{s-1} + \frac{\Lambda_2}{s+2}$ e

$$y(t) = u(t)[\Lambda_1 e^t + \Lambda_2 e^{-2t}]$$

Le costanti si calcolano come segue

$$\Lambda_1 = \lim_{s\to 1} Y(s)(s-1) = \lim_{s\to 1} \frac{s+1}{s+2} = 2/3$$

$$\Lambda_2 = \lim_{s\to -2} Y(s)(s+2) = \lim_{s\to -2} \frac{s+1}{s-1} = 1/3$$

e quindi

$$y(t) = u(t)[2/3e^t + 1/3e^{-2t}]$$

(Soluzione del problema di Cauchy)

Esercizi per casa

1. $$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizi per casa

1. $$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale doppio e due complessi coniugati. Si ha $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $y(t) = u(t)[t - \sin t]$.

Esercizi per casa

1.

$$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale doppio e due complessi coniugati. Si ha $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $y(t) = u(t)[t - \sin t]$.

2.

$$\begin{cases} y''' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizi per casa

1.

$$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale doppio e due complessi coniugati. Si ha $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $y(t) = u(t)[t - \sin t]$.

2.

$$\begin{cases} y''' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^3+1}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale e due complessi.

Esercizi per casa

1. $$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale doppio e due complessi coniugati. Si ha $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $y(t) = u(t)[t - \sin t]$.

2. $$\begin{cases} y''' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

   Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^3+1}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale e due complessi.

3. $$\begin{cases} y^{(iv)} + y'' = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizi per casa

1.
$$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale doppio e due complessi coniugati. Si ha $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $y(t) = u(t)[t - \sin t]$.

2.
$$\begin{cases} y''' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{1}{s^3+1}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale e due complessi.

3.
$$\begin{cases} y^{(iv)} + y'' = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, allora si trova che $Y(s) = \frac{s^3+2s-5}{s^3(s+1)}$. Poi si antitrasforma osservando che il denominatore ha uno zero reale triplo ed uno semplice.

Risposta all'impulso di Dirac

Si consideri

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0 \\ y^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è detta risposta all'impulso di Dirac o risposta impulsiva.

Risposta all'impulso di Dirac

Si consideri

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0 \\ y^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è detta risposta all'impulso di Dirac o risposta impulsiva. Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ allora

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)},$$

dove $P(s) = s^{(n)} + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 y$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale lineare.

Problema con condizioni iniziali omogenee

Si consideri inoltre il seguente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Problema con condizioni iniziali omogenee

Si consideri inoltre il seguente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ allora

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P(s)},$$

dove $P(s)$ è il polinomio caratteristico e $F(s)$ è la trasformata di f.

Problema con condizioni iniziali omogenee

Si consideri inoltre il seguente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ allora

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P(s)},$$

dove $P(s)$ è il polinomio caratteristico e $F(s)$ è la trasformata di f. Ricordanto che la tasformata dellla convoluzione di due funzioni è il prodotto delle trasformate, si ha

$$y(t) = y_0(t) * f(t),$$

dove $y_0(t)$ è la soluzione del problema (P_0). La funzione $\frac{1}{P(s)}$ è nota come funzione di trasferimento.

Problema con condizioni iniziali omogenee

Si consideri inoltre il seguente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Se $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ allora

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P(s)},$$

dove $P(s)$ è il polinomio caratteristico e $F(s)$ è la trasformata di f. Ricordanto che la tasformata dellla convoluzione di due funzioni è il prodotto delle trasformate, si ha

$$y(t) = y_0(t) * f(t),$$

dove $y_0(t)$ è la soluzione del problema (P_0). La funzione $\frac{1}{P(s)}$ è nota come funzione di trasferimento.
In conclusione la soluzione del problema (P) si ottiene facendo la convoluzione della risposta impulsiva $y_0(t)$ (soluzione del problema (P_0)) e il dato $f(t)$ dell'equazione.

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

La risposta impulsiva è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cioé $y_0(t) = \sin t \, u(t)$.

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

La risposta impulsiva è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cioé $y_0(t) = \sin t \, u(t)$. Quindi $y(t) = y_0(t) * f(t) = \int_0^t \sin \tau (t - \tau) \, d\tau$ per $t > 0$.
Si ha che

$$\int_0^t \sin \tau (t - \tau) \, d\tau = t \int_0^t \sin \tau \, d\tau - \int_0^t \sin \tau \, \tau \, d\tau$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

La risposta impulsiva è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cioé $y_0(t) = \sin t\, u(t)$. Quindi $y(t) = y_0(t) * f(t) = \int_0^t \sin\tau (t-\tau)\, d\tau$ per $t > 0$. Si ha che

$$\int_0^t \sin\tau (t-\tau)\, d\tau = t\int_0^t \sin\tau\, d\tau - \int_0^t \sin\tau\, \tau\, d\tau$$

$$\int_0^t \sin\tau\, d\tau = -\cos t + 1$$

$$\int_0^t \sin\tau\, \tau\, d\tau =^{\text{per parti}} -\cos\tau\, \tau]_0^t + \int_0^t \cos\tau\, d\tau = -\cos t\, t + \sin t$$

e quindi

$$\int_0^t \sin\tau (t-\tau)\, d\tau = -t\cos t + t + t\cos t - \sin t$$

per $t > 0$. In conclusione $y(t) = y_0(t) * f(t) = u(t)(t - \sin t)$.

Esempio

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

La risposta impulsiva è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{per } t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cioé $y_0(t) = \sin t u(t)$. Quindi $y(t) = y_0(t) * f(t) = \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\,d\tau$ per $t > 0$. Per le formule di addizione e sottrazione

$$\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \sin\tau(\sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau)\,d\tau$$

$$= \sin t \int_0^t \cos\tau\sin\tau\,d\tau - \cos t\int_0^t \sin^2\tau\,d\tau$$

Inoltre integrando per parti si ha

$$\int_0^t \sin^2\tau\,d\tau = -\frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{2}t$$

Infine $\int_0^t \cos\tau\sin\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\sin^2 t$. Ne segue che

$$\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\sin^3 t + \frac{1}{2}\sin t\cos^2 t - \frac{1}{2}t\cos t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)u(t)$$

Testi consigliati:

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa - Analisi matematica 2 - Zanichelli
- G.C. Barozzi - Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione - Zanichelli

Si possono inoltre consultare:

- M. Codegone - Metodi Matematici per l'Ingegneria - Zanichelli
- S. Abenda, S. Matarasso - Metodi Matematici - Progetto Leonardo