Trasformata di Fourier

Filomena Feo

Dipartimento di Ingegneria
Università degli Studi di Napoli "Parthenope", Italy

Matematica II - 3 CFU

Definizione

Data una funzione $x : t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di x è la funzione

$$\widehat{x} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{x}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

Definizione

Data una funzione $x : t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di x è la funzione

$$\widehat{x} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{x}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

Controlliamo che la definizione è ben posta

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) e^{-j\omega t} \right|\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \left| e^{-j\omega t} \right|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt \\ &< +\infty \text{ poichè } x \text{ è sommabile} \end{aligned} \tag{1}$$

ricordando che $\left| e^{-j\omega t} \right| = 1$.

Definizione

Data una funzione $x : t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{C}$ sommabile su $\mathbb{R}$ (cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < +\infty$), la trasformata di Fourier di x è la funzione

$$\widehat{x} : \omega \in \mathbb{R} \to \widehat{x}(\omega) \in \mathbb{C}$$

definita da

$$\widehat{x}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,dt.$$

Controlliamo che la definizione è ben posta

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)e^{-j\omega t}\right|\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\left|e^{-j\omega t}\right|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt \\ &< +\infty \text{ poichè } x \text{ è sommabile}\end{aligned} \tag{1}$$

ricordando che $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$.

Osserviamo che

$$\widehat{x}(0) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt.$$

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{x}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{x}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi f$ con f frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{x}$ come funzione della frequenza f e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt.$$

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{x}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi f$ con f frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{x}$ come funzione della frequenza f e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt.$$

La funzione $\widehat{x}(\omega)$ si denota anche con $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$.

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{x}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi f$ con f frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{x}$ come funzione della frequenza f e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt.$$

La funzione $\widehat{x}(\omega)$ si denota anche con $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$.

A volte si usa anche la notazione $X(\omega)$.

Definizione

Alcuni autori pongono

$$\widehat{x}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

La teoria non cambia. Il cambio del nucleo di Fourier serve a semplificare solo alcune formule, ma non tutte.

Intepretando ω come pulsazione, $\omega = 2\pi f$ con f frequenza. Allora possiamo pensare $\widehat{x}$ come funzione della frequenza f e porremo con abuso di notazione

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt.$$

La funzione $\widehat{x}(\omega)$ si denota anche con $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$.

A volte si usa anche la notazione $X(\omega)$.

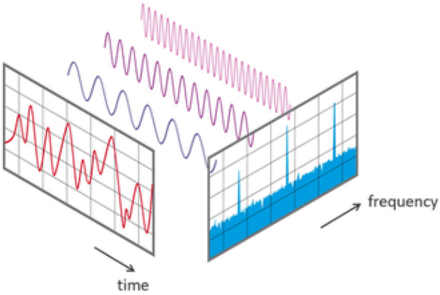
L'operatore Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ associa alla funzione sommabile $x(t)$ una nuova funzione $\widehat{x}(\omega)$, i.e.

$$\mathcal{F} : x(t) \to \widehat{x}(\omega)$$

Nota storica

La trasformata di Fourier è una trasformata integrale, cioè un operatore che trasforma una funzione in un'altra funzione, sviluppata dal matematico francese Jean Baptiste Joseph Fourier nel 1822, nel suo trattato Théorie analytique de la chaleur.
Trova numerose applicazioni nella fisica e nell'ingegneria ovvero uno degli strumenti matematici maggiormente utilizzati nell'ambito delle scienze pure e applicate, permettendo di scrivere una funzione dipendente dal tempo come combinazione lineare continua di funzioni di base esponenziali, dandone in questo modo una rappresentazione nel dominio delle frequenze.

Quando applichiamo la Trasformata di Fourier i dati non sono cambiati, ma li stiamo guardando in maniera differente. L'esempio più comune può essere dato dal guardare i dati nel dominio della frequenza. Sommando tutti le onde nel dominio della frequenza si otterrebbe il segnale originale.



Un vantaggio: le operazioni in un determinato dominio hanno delle operazioni corrispondenti in un altro dominio. Ad esempio la derivazione in uno corrisponde alla moltiplicazione di frequenze nell'altro. In questo modo le equazioni differenziali risultano molto più facili da risolvere nel dominio delle frequenze.
La Trasformata di Fourier è uno strumento importantissimo nell'analisi dei segnali, lavorazioni di immagini, ottica, ecc...

Approfondimenti

Video 1
Video 2
Video 3

Prime proprietá

Usando la (1) otteniamo che

$$|\widehat{x}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt$$

per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Prime proprietá

Usando la (1) otteniamo che

$$|\widehat{x}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\ dt$$

per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Ovvero la funzione $\widehat{x}(\omega)$ è limitata. In particolare il modulo di $\widehat{x}(\omega)$ è maggiorato dall'integrale del modulo di $x(t)$.

Esempio

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2}$$

Esempio

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2}$$

Per poterla trasformare coma prima cosa controlliamo se è sommabile. È una funzione reale non negativa, continua in $[a, b]$ e nulla altrove e quindi è sommabile (=integrabile in questo caso).

Esempio

Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2}$$

Per poterla trasformare coma prima cosa controlliamo se è sommabile. È una funzione reale non negativa, continua in $[a, b]$ e nulla altrove e quindi è sommabile (=integrabile in questo caso).
Procediamo al calcolo.

Esempio

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\,dt$$

Esempio

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \begin{cases} \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_a^b = \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \int_a^b dt = b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Controlliamo se $\widehat{x}(\omega)$ è continua su $\mathbb{R}$.

Esempio

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_a^b = \dfrac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \int_a^b dt = b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Controlliamo se $\widehat{x}(\omega)$ è continua su $\mathbb{R}$.
Bisogna calcolare

$$\lim_{\omega \to 0} \widehat{x}(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega}$$

Esempio

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_a^b e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_a^b = \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ \int_a^b dt = b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Controlliamo se $\widehat{x}(\omega)$ è continua su $\mathbb{R}$.
Bisogna calcolare

$$\lim_{\omega \to 0} \widehat{x}(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega}$$

Esempio

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-e^{-j\omega b}}{j\omega} &= \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-1-\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{j\omega}\\ &= \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega}(-1)+\frac{\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{-j\omega}\\ &= \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega a}(-a)+\frac{\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{-j\omega b}b = b-a=\widehat{x}(0)\end{aligned}$$

Esempio

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{e^{-j\omega a}-e^{-j\omega b}}{j\omega} = \lim_{\omega\to 0} \frac{e^{-j\omega a}-1-\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{j\omega}$$
$$= \lim_{\omega\to 0} \frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega}(-1) + \frac{\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{-j\omega}$$
$$= \lim_{\omega\to 0} \frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega a}(-a) + \frac{\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{-j\omega b} b = b-a = \widehat{x}(0)$$

i.e.

$$\lim_{\omega\to 0} \widehat{x}(\omega) = \widehat{x}(0)$$

Esempio

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-e^{-j\omega b}}{j\omega} &= \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-1-\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{j\omega}\\
&= \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega}(-1)+\frac{\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{-j\omega}\\
&= \lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega a}(-a)+\frac{\left(e^{-j\omega b}-1\right)}{-j\omega b}b = b-a=\widehat{x}(0)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\lim_{\omega\to 0}\widehat{x}(\omega)=\widehat{x}(0)$$

Ne segue che $\widehat{x}$ è una funzione continua.

Esempio

Abbiamo visto che

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \widehat{x}(\omega) = 0$$

Esempio

Abbiamo visto che

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \widehat{x}(\omega) = 0$$

Infatti

$$0 \leq |\widehat{x}(\omega)| \leq \frac{2}{|\omega|} \quad \forall \omega \neq 0.$$

Esempio

Abbiamo visto che

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}}{j\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \widehat{x}(\omega) = 0$$

Infatti

$$0 \leq |\widehat{x}(\omega)| \leq \frac{2}{|\omega|} \quad \forall \omega \neq 0.$$

Ricordando che

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \frac{2}{|\omega|} = 0,$$

dal teorema dei Carabinieri segue che $\lim_{|\omega| \to +\infty} |\widehat{x}(\omega)| = 0$ e quindi l'asserto.

Proprietà della Trasformata di Fourier

La proprietà che $\widehat{x}(\omega)$ è continua e che è infinitesima all'infinito (verificata per l'esempio precedente) è valida in generale. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione

Se $x(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{x}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{x}(\omega) = 0.$$

(senza dimostrazione)

La limitatezza è giá stata provata (vedere slide dopo la definizione).

Proprietà della Trasformata di Fourier

La proprietà che $\widehat{x}(\omega)$ è continua e che è infinitesima all'infinito (verificata per l'esempio precedente) è valida in generale. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione

Se $x(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{x}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{x}(\omega) = 0.$$

(senza dimostrazione)

La limitatezza è giá stata provata (vedere slide dopo la definizione).

L'operatore Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ associa alla funzione sommabile $x(t)$ una funzione $\widehat{x}(\omega)$ continua e limitata su $\mathbb{R}$ e infinitesima all'infinito.

Proprietà della Trasformata di Fourier

La proprietà che $\widehat{x}(\omega)$ è continua e che è infinitesima all'infinito (verificata per l'esempio precedente) è valida in generale. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione

Se $x(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{x}(\omega)$ è limitata, continua e

$$\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{x}(\omega) = 0.$$

(senza dimostrazione)

La limitatezza è giá stata provata (vedere slide dopo la definizione).

L'operatore Trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ associa alla funzione sommabile $x(t)$ una funzione $\widehat{x}(\omega)$ continua e limitata su $\mathbb{R}$ e infinitesima all'infinito.

Osserviamo che la proprietà $\lim_{|\omega|\to+\infty} \widehat{x}(\omega) = 0$ non è sufficiente per concludere che $\widehat{x}(\omega)$ è sommabile.

Esempio

(Trasformata di Fourier come funzione della frequenza) Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esempio

(Trasformata di Fourier come funzione della frequenza) Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\widehat{x}(f) = \begin{cases} \frac{e^{-2\pi jfa} - e^{-2\pi jfb}}{2\pi jf} & \text{se } \omega \neq 0 \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Esempio

(Trasformata di Fourier come funzione della frequenza) Sia $-\infty < a < b < +\infty$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\widehat{x}(f) = \begin{cases} \frac{e^{-2\pi jfa} - e^{-2\pi jfb}}{2\pi jf} & \text{se } \omega \neq 0 \\ b - a & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

la trasformata di Fourier di $x(t)$ è continua e

$$\lim_{|f| \to +\infty} \widehat{x}(f) = 0.$$

Esempio (Trasformata dell'impulso)

Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esempio (Trasformata dell'impulso)

Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che è sommabile ($a = -T/2, b = T/2$) e che la sua trasformata vale

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

Esempio (Trasformata dell'impulso)

Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che è sommabile ($a = -T/2, b = T/2$) e che la sua trasformata vale

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

Dalla formula di Eulero ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = T\frac{\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\frac{T}{2}\omega} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

e

$$\widehat{x}(0) = T$$

Esempio (Trasformata dell'impulso)

Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo già visto che è sommabile ($a = -T/2, b = T/2$) e che la sua trasformata vale

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

Dalla formula di Eulero ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = T\frac{\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\frac{T}{2}\omega} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

e

$$\widehat{x}(0) = T$$

Osservazione. Si osservi che $x(t)$ e $\widehat{x}(\omega)$ sono pari, reali di variabile reale.

Trasformata di Fourier dell'impulso

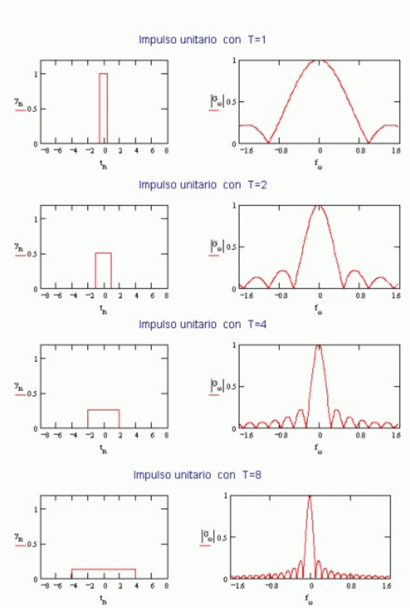
Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\widehat{x}(f) = 2\frac{\sin(\frac{T}{2}2\pi f)}{2\pi f} \quad \text{per } f \neq 0 \quad \text{e } \widehat{x}(0) = T$$

Trasformata di Fourier dell'impulso



Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[x_2(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[x_2(t)](\omega) = \frac{2\sin(1\omega)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](0) = 2 + 6$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[x_2(t)](\omega) = \frac{2\sin(1\omega)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](0) = 2 + 6$$

$$\mathcal{F}[5x_2(t)](\omega) = 5\mathcal{F}[x_2(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Esempio

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \mathcal{F}[x_2(t)](\omega) = \frac{2\sin(1\omega)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t)](0) = 2 + 6$$

$$\mathcal{F}[5x_2(t)](\omega) = 5\mathcal{F}[x_2(t)](\omega) = 5\frac{2\sin(3\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0, \quad \mathcal{F}[5x_2(t)](0) = 5 \times 6$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-j0}2 = 2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-j0}2 = 2$$

Osserva che

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt := \mathcal{F}[x(t)](0)$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-j0}2 = 2$$

Osserva che

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt := \mathcal{F}[x(t)](0)$$

$$\mathcal{F}[x(t+2)](\omega) = e^{2j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](\omega) = e^{-j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-j0}2 = 2$$

Osserva che

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt := \mathcal{F}[x(t)](0)$$

$$\mathcal{F}[x(t+2)](\omega) = e^{2j\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega) = e^{2j\omega}\frac{2\sin(1\omega)}{\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0, \mathcal{F}[x(t+2)](0) = e^{2j0}2 = 2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2\sin(\frac{\omega}{3})}{\frac{\omega}{3}} \quad \text{per } \omega \neq 0 \quad \mathcal{F}[x(3t)](0) = \frac{1}{3}2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2\sin(\frac{\omega}{3})}{\frac{\omega}{3}} \quad \text{per } \omega \neq 0 \quad \mathcal{F}[x(3t)](0) = \frac{1}{3}2$$

$$\mathcal{F}[x\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega) = 5\mathcal{F}[x(t)](-5\omega) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x(3t)](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2\sin(\frac{\omega}{3})}{\frac{\omega}{3}} \quad \text{per } \omega \neq 0 \quad \mathcal{F}[x(3t)](0) = \frac{1}{3}2$$

$$\mathcal{F}[x\left(-\frac{t}{5}\right)](\omega) = 5\mathcal{F}[x(t)](-5\omega) = 5\frac{2\sin(-5\omega)}{-5\omega} = 5\frac{2\sin(5\omega)}{5\omega} \quad \text{per } \omega \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x\left(-\frac{t}{5}\right)](0) = 5 \times 2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Le due proprità precedenti possono essere scritte usando un'unica formula.

Proprietà

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct - t_0)](\omega) = e^{-jt_0 \frac{\omega}{c}} \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[x(t)] \left(\frac{\omega}{c} \right).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Le due propritá precedenti possono essere scritte usando un'unica formula.

Proprietà

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct - t_0)](\omega) = e^{-jt_0 \frac{\omega}{c}} \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[x(t)] \left(\frac{\omega}{c} \right).$$

Infatti combinado le due precedenti propritá si ha che

$$\mathcal{F}[x(ct - t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega} \mathcal{F}[x(ct)](\omega) = e^{-jt_0 \frac{\omega}{c}} \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[x(t)] \left(\frac{\omega}{c} \right)$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\mathcal{F}[e^{jt}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - 1) =$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\mathcal{F}[e^{jt}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - 1) = \dfrac{2\sin(\omega - 1)}{\omega - 1}$ per $\omega \neq 1, \mathcal{F}[e^{jt}x(t)](1) = \mathcal{F}[x(t)](0) = 2$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[e^{jt}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - 1) = \frac{2\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} \quad \text{per } \omega \neq 1, \mathcal{F}[e^{jt}x(t)](1) = \mathcal{F}[x(t)](0) = 2$$

$$\mathcal{F}[e^{-2jt}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega + 2) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[e^{jt}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - 1) = \frac{2\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} \quad \text{per } \omega \neq 1, \mathcal{F}[e^{jt}x(t)](1) = \mathcal{F}[x(t)](0) = 2$$

$$\mathcal{F}[e^{-2jt}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega + 2) = \frac{2\sin(\omega + 2)}{\omega + 2} \quad \text{per } \omega \neq -2$$

$$\mathcal{F}[e^{-2jt}x(t)](-2) = \mathcal{F}[x(t)](0) = 2$$

Riscriviamo le proprietà relative alla traslazione pensano la trasformata come funzione della frequenza.

Riscriviamo le proprietà relative alla traslazione pensano la trasformata come funzione della frequenza.

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](f) = e^{-2\pi j t_0 f}\mathcal{F}[x(t)](f).$$

Riscriviamo le proprietà relative alla traslazione pensano la trasformata come funzione della frequenza.

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](f) = e^{-2\pi j t_0 f}\mathcal{F}[x(t)](f).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{F}[x(t-1)](f) = e^{-2\pi j f}\mathcal{F}[x(t)](f) =$$

Riscriviamo le proprietà relative alla traslazione pensano la trasformata come funzione della frequenza.

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](f) = e^{-2\pi j t_0 f}\mathcal{F}[x(t)](f).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{F}[x(t-1)](f) = e^{-2\pi j f}\mathcal{F}[x(t)](f) = e^{-2\pi j f}\frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} \quad \text{per } f \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-2\pi j 0}2$$

Riscriviamo le proprietà relative alla traslazione pensano la trasformata come funzione della frequenza.

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](f) = e^{-2\pi j t_0 f}\mathcal{F}[x(t)](f).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{F}[x(t-1)](f) = e^{-2\pi j f}\mathcal{F}[x(t)](f) = e^{-2\pi j f}\frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} \quad \text{per } f \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-2\pi j 0}2$$

$$\mathcal{F}[x(t+2)](f) = e^{2\times 2\pi j f}\mathcal{F}[x(t)](f) =$$

Riscriviamo le proprietà relative alla traslazione pensano la trasformata come funzione della frequenza.

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](f) = e^{-2\pi j t_0 f}\mathcal{F}[x(t)](f).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{F}[x(t-1)](f) = e^{-2\pi jf}\mathcal{F}[x(t)](f) = e^{-2\pi jf}\frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} \quad \text{per } f \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t-1)](0) = e^{-2\pi j0}2$$

$$\mathcal{F}[x(t+2)](f) = e^{2\times 2\pi jf}\mathcal{F}[x(t)](f) = e^{2\times 2\pi jf}\frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f} \quad \text{per } f \neq 0$$

$$\mathcal{F}[x(t+2)](0) = e^{2\times 2\pi j0}2$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $f_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{2\pi j f_0 t} x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](f - f_0).$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $f_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{2\pi j f_0 t} x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](f - f_0).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{F}[e^{2\pi j t} x(t)](f) = \mathcal{F}[x(t)](f - 1) =$$

Proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $f_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{2\pi j f_0 t} x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](f - f_0).$$

Esempio

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{F}[e^{2\pi jt} x(t)](f) = \mathcal{F}[x(t)](f-1) = \frac{2\sin(2\pi(f-1))}{2\pi(f-1)} \quad \text{per } f \neq 1$$

$$\mathcal{F}[e^{2\pi jt} x(t)](1) = \mathcal{F}[x(t)](0) = 2$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

1)

$$\mathcal{F}[x_1(t-1) - x_2(t)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
1)

$$\mathcal{F}[x_1(t-1) - x_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t-1)](\omega) - \mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$

1)

$$\mathcal{F}[x_1(t-1) - x_2(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t-1)](\omega) - \mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(t)](\omega) - \mathcal{F}[x_2(t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin(\omega)}{\omega} - \frac{2\sin(3\omega)}{\omega}$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[x_1(4t-1) - 2x_2(-4t+5)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[x_1(4t-1) - 2x_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[x_2(-4t+5)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[x_1(4t-1) - 2x_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[x_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega)$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3, 3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[x_1(4t-1) - 2x_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[x_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega) =$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[x_1(4t-1) - 2x_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[x_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{1}{4}\mathcal{F}[x_1(t)](\frac{\omega}{4}) - \frac{2}{4}e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(t)](\frac{-\omega}{4})$$

Esercizi

Siano

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-3,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare per $\omega \neq 0$
2)

$$\mathcal{F}[x_1(4t-1) - 2x_2(-4t+5)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(4t-1)](\omega) - 2\mathcal{F}[x_2(-4t+5)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\mathcal{F}[x_1(4t)](\omega) - 2e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(-4t)](\omega) = e^{-j\omega}\frac{1}{4}\mathcal{F}[x_1(t)](\frac{\omega}{4}) - \frac{2}{4}e^{5j\omega}\mathcal{F}[x_2(t)](\frac{-\omega}{4})$$

$$= e^{-j\omega}\frac{1}{4}\frac{2\sin(\frac{\omega}{4})}{\frac{\omega}{4}} - \frac{2}{4}e^{5j\omega}\frac{2\sin(-3\frac{\omega}{4})}{\frac{-\omega}{4}}$$

Per casa fare il conto quando $\omega = 0$

Trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-|t|}$

È sommabile su $\mathbb{R}$.

Sono possibili due motivazioni.

- (usando i criteri di sommabilità) $x(t)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{e^{-|t|}}{\frac{1}{|t|^{\alpha}}} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-|t|}$

È sommabile su $\mathbb{R}$.

Sono possibili due motivazioni.

- (usando i criteri di sommabilità) $x(t)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{e^{-|t|}}{\frac{1}{|t|^{\alpha}}} = 0 \quad \forall\alpha > 0$$

- (usando la definizione di integrale in senso improprio/generalizzato) Usando la simmetria della funzione basta infatti far vedere che

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-|t|}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{e^{-|t|}}{-1} \right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} -e^{-|b|} + 1 = 1$$

Trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt$$

Trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt$$

Trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt$$

Ossevando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt = 0$$

perchè la funzione integranda è dispari, si ha

$$\widehat{x}(\omega) = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-|t|}$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt$$

Ossevando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \sin(\omega t)\, dt = 0$$

perchè la funzione integranda è dispari, si ha

$$\widehat{x}(\omega) = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Infatti

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt = \left. e^{-|t|} \cos(\omega t) \right]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \omega \sin(\omega t)\, dt$$

$$= 1 - \omega \left[\left. -\sin(\omega t) e^{-|t|} \right]_{0}^{\infty} + \omega \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt \right] = 1 - \omega^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)\, dt$$

Allora

$$(1+\omega^2)\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt = 1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{x}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Allora

$$(1+\omega^2)\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt = 1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{x}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Osservazione. Si osservi che $x(t)$ e $\widehat{x}(\omega)$ sono reali, pari di variabile reale.

Esercizi per casa

Siano

$$x_1(t) = e^{-|t|}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad x_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [2,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare

1. $\mathcal{F}[x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)](\omega)$
2. $\mathcal{F}[-x_1(t) + 3x_2(t)](\omega)$
3. $\mathcal{F}[x_1(t-1) - x_2(t/3)](\omega)$
4. $\mathcal{F}[e^{jt}x_1(t) + x_2(t-2)](\omega)$
5. $\mathcal{F}[e^{-jt}x_1(t) + x_2(t+2)](\omega)$
6. $\mathcal{F}[e^{j(t-1)}x_1(t-1)](\omega)$
7. $\mathcal{F}[e^{j(t+3)}x_1(t+3)](\omega)$
8. $\mathcal{F}[e^{j(t-1)}x_2(t-1)](\omega)$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Linearità

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Dimostrazione. Se $x_1(t), x_2(t)$ sono due funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e α_1, α_2 due costanti complesse, allora $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ è ancora una funzione sommabile.Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)|\, dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [|\alpha_1||x_1(t)| + |\alpha_2||x_2(t)|\, dt]$$

$$= |\alpha_1| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|\, dt + |\alpha_2| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t)|\, dt$$

La linearità della trasformata di Fourier è conseguenza della linearità dell'integrale. Infatti

$$\mathcal{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t}\, dt + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t}\, dt = \alpha_1 \mathcal{F}[x_1(t)](\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}[x_2(t)](\omega).$$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione di partenza

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Dimostrazione. Se $x(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ allora lo è anche la sua traslata. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-t_0)|\, dt =^{(t-t_0=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\, d\tau < \infty.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}\, dt =^{(t-t_0=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}\, d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau = e^{-jt_0\omega}\mathcal{F}[x(t)](\omega).$$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c}).$$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto rispetto al riscalamento

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, allora

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c}).$$

Dimostrazione. Consideriamo $c > 0$. Se $x(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ allora lo è anche la funzione riscalata $x(ct)$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(ct)|\, dt =^{(ct=\tau)} \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\, d\tau < \infty.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}[x(ct)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(ct)e^{-j\omega t}\, dt =^{(ct=\tau)} \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega\tau}{c}}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{c}\mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c}) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[x(t)](\frac{\omega}{c}).$$

Il caso $c < 0$ segue in maniera analoga ed è lasciato allo studente come esercizio.

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Dimostrazione delle proprietà della Trasformata di Fourier

Comportamento rispetto alla traslazione della funzione trasformata

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Dimostrazione. Se $x(t)$ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ allora lo è anche la funzione riscalata $e^{j\omega_0 t}x(t)$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{j\omega_0 t}x(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}x(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t}x(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t))e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt$$

$$= \mathcal{F}[x(t)](\omega - \omega_0).$$

Esercizio

Siano
$x_1(t) = e^{-|t|}, x_2(t) = x_1(2t), x_3(t) = x_1(t-3), x_4(t) = x_1(2t-3), x_5(t) = e^{5jt}x_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.

Esercizio

Siano
$x_1(t) = e^{-|t|}, x_2(t) = x_1(2t), x_3(t) = x_1(t-3), x_4(t) = x_1(2t-3), x_5(t) = e^{5jt}x_1(t).$
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{x_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

Esercizio

Siano
$x_1(t) = e^{-|t|}, x_2(t) = x_1(2t), x_3(t) = x_1(t-3), x_4(t) = x_1(2t-3), x_5(t) = e^{5jt}x_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{x_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{x_2}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

Esercizio

Siano
$x_1(t) = e^{-|t|}, x_2(t) = x_1(2t), x_3(t) = x_1(t-3), x_4(t) = x_1(2t-3), x_5(t) = e^{5jt}x_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{x_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{x_2}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{x_3}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[x_1(t)]\,(\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

Esercizio

Siano
$x_1(t) = e^{-|t|}, x_2(t) = x_1(2t), x_3(t) = x_1(t-3), x_4(t) = x_1(2t-3), x_5(t) = e^{5jt}x_1(t).$
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{x_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{x_2}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{x_3}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[x_1(t)](\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{x_4}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(2t-3))](\omega) = \mathcal{F}[x_1(2(t-3/2))](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t-3/2)]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Esercizio

Siano
$x_1(t) = e^{-|t|}, x_2(t) = x_1(2t), x_3(t) = x_1(t-3), x_4(t) = x_1(2t-3), x_5(t) = e^{5jt}x_1(t)$.
Calcolarne le trasformate.
Ricordiamo che $\widehat{x_1}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, allora

$$\widehat{x_2}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(2t)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{x_3}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(t-3)](\omega) = e^{-j3\omega}\mathcal{F}[x_1(t)]\,(\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{x_4}(\omega) = \mathcal{F}[x_1(2t-3))](\omega) = \mathcal{F}[x_1(2(t-3/2))](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t-3/2)]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{1}{2}\mathcal{F}[x_1(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier

Ci chiediamo: se trasformano una funzione a valori reali, la trasformata è ancora a valori reali?

Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier

Ci chiediamo: se trasformano una funzione a valori reali, la trasformata è ancora a valori reali?
Abbiamo visto il caso dell'impulso e di $x(t) = e^{-|t|}$.
Vale la seguente proposizione.

Ulteriori proprietà

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

i) Se $x(t)$ è reale e pari allora $\widehat{x}(\omega)$ è reale pari.

ii) Se $x(t)$ è reale e dispari allora $\widehat{x}(\omega)$ è puramente immaginaria dispari.

Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier

Ci chiediamo: se trasformano una funzione a valori reali, la trasformata è ancora a valori reali?
Abbiamo visto il caso dell'impulso e di $x(t) = e^{-|t|}$.
Vale la seguente proposizione.

Ulteriori proprietà

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

- **i)** Se $x(t)$ è reale e pari allora $\widehat{x}(\omega)$ è reale pari.
- **ii)** Se $x(t)$ è reale e dispari allora $\widehat{x}(\omega)$ è puramente immaginaria dispari.

i)

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{pari}$$
$$\Downarrow$$
$$\widehat{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{pari}$$

Ulteriori proprietà della Trasformata di Fourier

Ci chiediamo: se trasformano una funzione a valori reali, la trasformata è ancora a valori reali?
Abbiamo visto il caso del'impulso e di $x(t) = e^{-|t|}$.
Vale la seguente proposizione.

Ulteriori proprietà

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

i) Se $x(t)$ è reale e pari allora $\widehat{x}(\omega)$ è reale pari.

ii) Se $x(t)$ è reale e dispari allora $\widehat{x}(\omega)$ è puramente immaginaria dispari.

i)

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{pari}$$
$$\Downarrow$$
$$\widehat{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{pari}$$

ii)

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dispari}$$
$$\Downarrow$$
$$\widehat{x} : \mathbb{R} \to j\mathbb{R} \quad \text{dispari}$$

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.
Primo passo: x pari $\Rightarrow \widehat{x}$ pari.

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.
Primo passo: x pari $\Rightarrow \widehat{x}$ pari.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt =^{x \text{ pari}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}\,dt =$$

$$=^{(-t=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \widehat{x}(\omega)$$

Secondo passo: x reale $\Rightarrow \widehat{x}$ reale.

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.
Primo passo: x pari $\Rightarrow \widehat{x}$ pari.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt =^{x \text{ pari}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}\,dt =$$

$$=^{(-t=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \widehat{x}(\omega)$$

Secondo passo: x reale $\Rightarrow \widehat{x}$ reale. Basta far vedere che $\overline{\widehat{x}(\omega)} = \widehat{x}(-\omega)$.

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.
Primo passo: x pari $\Rightarrow \widehat{x}$ pari.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt =^{x \text{ pari}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}\,dt =$$

$$=^{(-t=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \widehat{x}(\omega)$$

Secondo passo: x reale $\Rightarrow \widehat{x}$ reale. Basta far vedere che $\overline{\widehat{x}(\omega)} = \widehat{x}(-\omega)$.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt =^{x \text{ reale}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)e^{-j\omega(t)}}\,dt =$$

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.
Primo passo: x pari $\Rightarrow \widehat{x}$ pari.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t}\, dt =^{x \text{ pari}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j\omega(-t)}\, dt =$$

$$=^{(-t=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \widehat{x}(\omega)$$

Secondo passo: x reale $\Rightarrow \widehat{x}$ reale. Basta far vedere che $\overline{\widehat{x}(\omega)} = \widehat{x}(-\omega)$.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t}\, dt =^{x \text{ reale}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t) e^{-j\omega(t)}}\, dt =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega(t)}\, dt} = \overline{\widehat{x}(\omega)}$$

Dimostrazione i)

Ricordiamo che una funzione $x(t)$ di variabile reale si dice pari se $x(-t) = x(t)$.
Primo passo: x pari $\Rightarrow \widehat{x}$ pari.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt =^{x\text{ pari}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}\,dt =$$

$$=^{(-t=\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \widehat{x}(\omega)$$

Secondo passo: x reale $\Rightarrow \widehat{x}$ reale. Basta far vedere che $\overline{\widehat{x}(\omega)} = \widehat{x}(-\omega)$.

$$\widehat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt =^{x\text{ reale}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)e^{-j\omega(t)}}\,dt =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega(t)}\,dt} = \overline{\widehat{x}(\omega)}$$

La dimostrazione di ii) è lasciata come esercizio allo studente.

Trasformata di funzioni pari e dispari

Sia $x(t)$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

i) Se $x(t)$ è pari allora

$$\widehat{x}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)\,dt$$

(perché $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\,dt = 0$)

ii) Se $x(t)$ è dispari allora

$$\widehat{x}(\omega) = 2j\int_0^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\,dt$$

(perché $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)\,dt = 0$)

Formula d'inversione

Si può risalire a $x(t)$ nota la sua trasformata $\widehat{x}(\omega)$?

Formula d'inversione

Si può risalire a $x(t)$ nota la sua trasformata $\widehat{x}(\omega)$?

Definizione

Una funzione $x(t)$ si continua a tratti su $\mathbb{R}$, se è continua in ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tranne al più in un numero finito di punti che sono discontinuità di prima specie (salti).

Formula d'inversione

Si può risalire a $x(t)$ nota la sua trasformata $\widehat{x}(\omega)$?

Definizione

Una funzione $x(t)$ si continua a tratti su $\mathbb{R}$, se è continua in ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tranne al più in un numero finito di punti che sono discontinuità di prima specie (salti). Una funzione $x(t)$ si C^1 a tratti su $\mathbb{R}$, se essa è continua a tratti e la funzione derivata è continua a tratti.

Formula d'inversione

Si può risalire a $x(t)$ nota la sua trasformata $\widehat{x}(\omega)$?

Definizione

Una funzione $x(t)$ si continua a tratti su $\mathbb{R}$, se è continua in ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tranne al più in un numero finito di punti che sono discontinuità di prima specie (salti). Una funzione $x(t)$ si C^1 a tratti su $\mathbb{R}$, se essa è continua a tratti e la funzione derivata è continua a tratti. Ammette quindi un numero finito di punti di non continuità e di non derivabilità di prima specie (salti e punti angolosi) in ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Integrale nel senso del valor principale

Definizione

Una funzione reale $x(t)$ continua in $\mathbb{R}$ è integrabile nel senso del valor principale su $\mathbb{R}$ se esiste e

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} x(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

e indicheremo tale valore con v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$.

Integrale nel senso del valor principale

Definizione

Una funzione reale $x(t)$ continua in $\mathbb{R}$ è integrabile nel senso del valor principale su $\mathbb{R}$ se esiste e

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} x(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

e indicheremo tale valore con v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$.

$$\text{integrabile} \;\Rightarrow\; \text{integrabile nel senso del valor principale}$$

Integrale nel senso del valor principale

Definizione

Una funzione reale $x(t)$ continua in $\mathbb{R}$ è integrabile nel senso del valor principale su $\mathbb{R}$ se esiste e

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} x(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

e indicheremo tale valore con v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$.

$$\text{integrabile} \Rightarrow \text{integrabile nel senso del valor principale}$$

Inoltre

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

Integrale nel senso del valor principale

integrabile nel senso del valor principale $\not\Rightarrow$ integrabile

Integrale nel senso del valor principale

integrabile nel senso del valor principale $\not\Rightarrow$ integrabile

Esempio

La funzione

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq 1 \\ 1/t & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$

Integrale nel senso del valor principale

integrabile nel senso del valor principale $\not\Rightarrow$ integrabile

Esempio

La funzione

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq 1 \\ 1/t & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$

non è integrabile su $[0, +\infty)$ e quindi su $\mathbb{R}$ (perchè è continua e infinitesima per $t \to +\infty$ d'ordine 1), ma è integrabile nel senso del valor principale. Infatti

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} x(t)\, dt = 0$$

(usando che la funzione è dispari), quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0$$

Integrale nel senso del valor principale

Definizione

Una funzione complessa $x(t)$ continua in $\mathbb{R}$ è integrabile nel senso del valor principale su $\mathbb{R}$ se esiste e

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} x(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

e indicheremo tale valore con v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$.

Formula di inversione

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1a tratti in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$$

dove $x(t^+)=\lim_{\Delta t\to 0^+}x(t+\Delta t)$ e $x(t^-)=\lim_{\Delta t\to 0^+}x(t-\Delta t)$.

Formula di inversione

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1a tratti in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$$

dove $x(t^+) = \lim_{\Delta t\to 0^+} x(t+\Delta t)$ e $x(t^-) = \lim_{\Delta t\to 0^+} x(t-\Delta t)$.

(senza dimostrazione)

Formula di inversione

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1a tratti in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$$

dove $x(t^+) = \lim_{\Delta t\to 0^+} x(t+\Delta t)$ e $x(t^-) = \lim_{\Delta t\to 0^+} x(t-\Delta t)$.

(senza dimostrazione)

Si osservi che v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \lim_{r\to+\infty}\int_{-R}^{R}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$

Formula di inversione

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1a tratti in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

dove $x(t^+) = \lim_{\Delta t \to 0^+} x(t + \Delta t)$ e $x(t^-) = \lim_{\Delta t \to 0^+} x(t - \Delta t)$.

(senza dimostrazione)

Si osservi che v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \lim_{r \to +\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$

Nei punti di continuità si ha $x(t^+) = x(t^-) = x(t)$ e quindi la formula mi restituisce il valore $x(t)$. Nei punti di discontinuità (salto) mi restituisce il valore $\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$, ovvero il punto medio tra gli estremi del salto.

Formula di inversione

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1a tratti in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$$

dove $x(t^+)=\lim_{\Delta t\to 0^+}x(t+\Delta t)$ e $x(t^-)=\lim_{\Delta t\to 0^+}x(t-\Delta t)$.

(senza dimostrazione)

Si osservi che v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\lim_{r\to+\infty}\int_{-R}^{R}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$

Nei punti di continuità si ha $x(t^+)=x(t^-)=x(t)$ e quindi la formula mi restituisce il valore $x(t)$. Nei punti di discontinuità (salto) mi restituisce il valore $\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$, ovvero il punto medio tra gli estremi del salto.

Formula di inversione per funzioni continue

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1 a tratti e continua in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=x(t)$$

Formula di inversione

Formula di inversione

Se la funzione $x(t)$ è sommabile e C^1 a tratti e continua in $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = x(t)$$

Si riscrive come segue

$$\mathcal{F}[\widehat{x}(\omega)](t) = 2\pi x(-t)$$

ovvero

$$\widehat{\widehat{x}}(t) = 2\pi x(-t)$$

(formula di dualità)

Formula di inversione

Sia $T > 0$ e

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Sappiamo che

$$\widehat{x}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(T/2\omega)}{\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ T & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Vediamo cosa ci restitusce la formula.

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega =^{\text{(definizione TF)}} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega =^{\text{(definizione TF)}} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$=^{\text{(Teorema Fubini)}} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-R}^{R} e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} \left. \frac{e^{j\omega(t-\tau)}}{j(t-\tau)} \right]_{-R}^{R} d\tau$$

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega =^{\text{(definizione TF)}} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$=^{\text{(Teorema Fubini)}} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-R}^{R} e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{e^{j\omega(t-\tau)}}{j(t-\tau)} \right]_{-R}^{R} d\tau$$

$$=^{\text{(Formula Eulero)}} 2 \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin\left(R(t-\tau)\right)}{t-\tau} d\tau =^{(t-\tau=\sigma)} 2 \int_{-T/2+t}^{T/2+t} \frac{\sin(R\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\int_{-R}^{R} \widehat{x}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega =^{\text{(definizione TF)}} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$=^{\text{(Teorema Fubini)}} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-R}^{R} e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} \left. \frac{e^{j\omega(t-\tau)}}{j(t-\tau)} \right]_{-R}^{R} d\tau$$

$$=^{\text{(Formula Eulero)}} 2 \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin\left(R(t-\tau)\right)}{t-\tau} d\tau =^{(t-\tau=\sigma)} 2 \int_{-T/2+t}^{T/2+t} \frac{\sin\left(R\sigma\right)}{\sigma} d\sigma$$

$$=^{(\phi=R\sigma)} 2 \int_{R(-T/2+t)}^{R(T/2+t)} \frac{\sin\left(\phi\right)}{\phi} d\phi =^{\text{additività dominio integrazione}}$$

$$2 \int_{R(-T/2+t)}^{0} \frac{\sin\left(\phi\right)}{\phi} d\phi + 2 \int_{0}^{R(T/2+t)} \frac{\sin\left(\phi\right)}{\phi} d\phi$$

$$\left(\int_a^b = -\int_b^a\right) = -2 \int_{0}^{R(-T/2+t)} \frac{\sin\left(\phi\right)}{\phi} d\phi + 2 \int_{0}^{R(T/2+t)} \frac{\sin\left(\phi\right)}{\phi} d\phi$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\begin{cases}\pi/2 & \text{se } y>0\\ 0 & \text{se } y=0\\ -\pi/2 & \text{se } y<0\end{cases}$$

Si osservi che il conto é banale per $y=0$. Inoltre se $y<0$ usando che la funzione integranda è pari

$$\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\int_{-Ry}^{0}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi$$

Inoltre dalla proprietá dell'integrale

$$\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\int_{-Ry}^{0}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=-\int_0^{-Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi$$

In conclusione il caso $y<0$ si ricava da quello $y>0$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\begin{cases}\pi/2 & \text{se } y>0\\ 0 & \text{se } y=0\\ -\pi/2 & \text{se } y<0\end{cases}$$

Si osservi che il conto é banale per $y=0$. Inoltre se $y<0$ usando che la funzione integranda è pari

$$\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\int_{-Ry}^{0}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi$$

Inoltre dalla proprietá dell'integrale

$$\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\int_{-Ry}^{0}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=-\int_0^{-Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi$$

In conclusione il caso $y<0$ si ricava da quello $y>0$
Il conto per $y>0$ lo faremo nel corso di Metodi per l'Ingegneria usando la teoria dei residui.

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\begin{cases}\pi/2 & \text{se } y>0\\ 0 & \text{se } y=0\\ -\pi/2 & \text{se } y<0\end{cases}$$

Allora

$$\lim_{R\to+\infty}2\int_0^{R(T/2+t)}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi-2\int_0^{R(-T/2+t)}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\begin{cases}2\pi & \text{se } |t|<T/2\\ \pi & \text{se } |t|=T/2\\ 0 & \text{se } |t|>T/2\end{cases}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{Ry}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\begin{cases}\pi/2 & \text{se } y>0\\ 0 & \text{se } y=0\\ -\pi/2 & \text{se } y<0\end{cases}$$

Allora

$$\lim_{R\to+\infty} 2\int_0^{R(T/2+t)}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi-2\int_0^{R(-T/2+t)}\frac{\sin(\phi)}{\phi}d\phi=\begin{cases}2\pi & \text{se } |t|<T/2\\ \pi & \text{se } |t|=T/2\\ 0 & \text{se } |t|>T/2\end{cases}$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\begin{cases}1 & \text{se } |t|<T/2\\ 1/2 & \text{se } |t|=T/2\\ 0 & \text{se } |t|>T/2\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{x}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=x(t)\quad \text{per } |t|\neq T/2$$

Trasformata della convoluzione

Definizione di convoluzione di due funzioni

Siano x_1, x_2 due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ definiamo

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t - \xi)\, d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Definizione di convoluzione di due funzioni

Siano x_1, x_2 due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ definiamo

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi$$

Proprietà

- $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$ (p. commutativa)
- $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$ (p. associativa)
- $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$ (p. distributiva)

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(x_1 * x_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se x_1, x_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(x_1 * x_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se x_1, x_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(x_1 * x_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi) \, d\xi \right| \, dt$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(x_1 * x_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se x_1, x_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(x_1 * x_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi) \, d\xi \right| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi) x_2(t-\xi)| \, d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \, |x_2(t-\xi)| \, dt \, d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(x_1 * x_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se x_1, x_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(x_1 * x_2)(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi \right| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi) x_2(t-\xi)| \, d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \, |x_2(t-\xi)| \, dt \, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t-\xi)| \; dt d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(x_1 * x_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se x_1, x_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(x_1 * x_2)(t)| \; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi) \, d\xi \right| \; dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi) x_2(t-\xi)| \; d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \, |x_2(t-\xi)| \; dt \, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t-\xi)| \; dt d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(\tau)| \; d\tau d\xi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \; d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(\tau)| \; d\tau \right)$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 1. La funzione $(x_1 * x_2)(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ se x_1, x_2 sonno due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(x_1 * x_2)(t)| \; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi) \, d\xi \right| \; dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi) x_2(t-\xi)| \; d\xi \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \, |x_2(t-\xi)| \; dt \, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t-\xi)| \; dt d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(\tau)| \; d\tau d\xi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(\xi)| \; d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(\tau)| \; d\tau \right)$$

$$< +\infty$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 * x_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 * x_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 * x_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi)x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi)x_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 * x_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi)x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi)x_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_2(t-\xi)\, dt\right) d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+\xi)} x_2(\tau)\, d\tau\right) d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 * x_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

$$=^{(\tau = t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+\xi)} x_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) e^{-j\omega\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} x_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

Trasformata della convoluzione

Proposizione

Se x_1, x_2 sono due funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)](\omega)\mathcal{F}[x_2(t)](\omega)$$

Dimostrazione

Passo 2.

$$\mathcal{F}[(x_1 * x_2)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 * x_2)(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_1(\xi) x_2(t-\xi)\, dt\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x_2(t-\xi)\, dt \right) d\xi$$

$$=^{(\tau=t-\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+\xi)} x_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) e^{-j\omega\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} x_2(\tau)\, d\tau \right) d\xi$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) e^{-j\omega\xi}\, d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} x_2(\tau)\, d\tau \right) = \widehat{x_1}(\omega)\widehat{x_2}(\omega)$$

Trasformata Fourier della derivata

Proposizione

Se x è una funzione sommabile e continua su $\mathbb{R}$ con derivata continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = j\omega\mathcal{F}[x(t)](\omega)$$

(senza dimostrazione)

Trasformata Fourier della derivata: esempio (Trasformata di un segnale triangolare)

Sia

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ a + t & \text{se } -a \leq t < 0 \\ a - t & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

Disegnarne il grafico!

Trasformata Fourier della derivata: esempio (Trasformata di un segnale triangolare)

Sia

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ a+t & \text{se } -a \leq t < 0 \\ a-t & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

Disegnarne il grafico!

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ 1 & \text{se } -a \leq t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

Trasformata Fourier della derivata: esempio (Trasformata di un segnale triangolare)

Sia

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ a+t & \text{se } -a \leq t < 0 \\ a-t & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

Disegnarne il grafico!

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ 1 & \text{se } -a \leq t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

Controllare che siamo nelle ipotesi della proposizione precedente.

Trasformata Fourier della derivata: esempio (Trasformata di un segnale triangolare)

Sia

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ a+t & \text{se } -a \leq t < 0 \\ a-t & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ 1 & \text{se } -a \leq t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\omega a} - e^{j\omega 0}}{j\omega} - \frac{e^{j\omega 0} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = \frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Infatti

$$\frac{e^{j\omega a} - e^{j\omega 0}}{j\omega} - \frac{e^{j\omega 0} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = \frac{e^{j\omega a} + e^{-j\omega a} - 2}{j\omega} = \frac{2\cos(\omega a) - 2}{j\omega}$$

$$= \frac{-2}{j\omega}[1 - \cos(\omega a)] =^{\text{f. bisezione}} \frac{-2}{j\omega} 2\sin^2(\omega a/2) = \frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega}$$

Trasformata Fourier della derivata: esempio

Sia

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ a+t & \text{se } -a \leq t < 0 \\ a-t & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ 1 & \text{se } -a \leq t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\omega a} - e^{j\omega 0}}{j\omega} - \frac{e^{j\omega 0} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = \frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Trasformata Fourier della derivata: esempio

Sia

$$x(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } t<-a \\ a+t & \text{se } -a\le t<0 \\ a-t & \text{se } 0\le t\le a \\ 0 & \text{se } t>a \end{cases}$$

$$x'(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } t<-a \\ 1 & \text{se } -a\le t<0 \\ -1 & \text{se } 0\le t\le a \\ 0 & \text{se } t>a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega)=\begin{cases} \frac{e^{j\omega a}-e^{j\omega 0}}{j\omega}-\frac{e^{j\omega 0}-e^{-j\omega a}}{j\omega}=\frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega} & \text{se } \omega\ne 0 \\ 0 & \text{se } \omega=0 \end{cases}$$

Usando la proposizione precedente si ha

$$j\omega\widehat{x}(\omega)=\frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega}\quad \text{se } \omega\ne 0$$

i.e.

$$\widehat{x}(\omega)=\frac{4\sin^2(\omega a/2)}{\omega^2}\ \text{se } \omega\ne 0$$

Trasformata Fourier della derivata: esempio

Sia

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ a+t & \text{se } -a \le t < 0 \\ a-t & \text{se } 0 \le t \le a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -a \\ 1 & \text{se } -a \le t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \le t \le a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\omega a} - e^{j\omega 0}}{j\omega} - \frac{e^{j\omega 0} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = \frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega} & \text{se } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Usando la proposizione precedente si ha

$$j\omega\widehat{x}(\omega) = \frac{4j\sin^2(\omega a/2)}{\omega} \quad \text{se } \omega \neq 0$$

i.e.

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{4\sin^2(\omega a/2)}{\omega^2} \text{ se } \omega \neq 0$$

Si osservi che $j\omega\widehat{x}(\omega) = 0 \quad$ se $\omega = 0$ non permette di ricavare $\widehat{x}(0)$. Calcolando direttamente si ha $\widehat{x}(0) = a^2$.

Trasformata della derivata d'ordine n

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x^{(n)}(t)](\omega) = (j\omega)^n \mathcal{F}[x(t)](\omega)$$

Trasformata della derivata d'ordine n

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x^{(n)}(t)](\omega) = (j\omega)^n \mathcal{F}[x(t)](\omega)$$

Conseguenze

Ricordando che $\mathcal{F}[x^{(n)}(t)](\omega) \to 0$ quando $|\omega| \to \infty$ allora

$$\mathcal{F}[x(t)](\omega) = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) \quad |\omega| \to +\infty$$

$$\text{i.e.} \quad \lim_{|\omega| \to +\infty} \frac{\mathcal{F}[x(t)]}{\frac{1}{|\omega|^n}} = 0$$

Trasformata della derivata d'ordine n

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$ allora

$$\mathcal{F}[x^{(n)}(t)](\omega) = (j\omega)^n \mathcal{F}[x(t)](\omega)$$

Conseguenze

Ricordando che $\mathcal{F}[x^{(n)}(t)](\omega) \to 0$ quando $|\omega| \to \infty$ allora

$$\mathcal{F}[x(t)](\omega) = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) \quad |\omega| \to +\infty$$

$$\text{i.e.} \quad \lim_{|\omega| \to +\infty} \frac{\mathcal{F}[x(t)]}{\frac{1}{|\omega|^n}} = 0$$

La funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ per $|\omega| \to +\infty$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n sufficientemente regolari e sommabili (precisamente $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$).

Trasformata della derivata d'ordine n

Conseguenze

$$\mathcal{F}[x(t)] = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) \quad |\omega| \to +\infty$$

se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$.

Per $|\omega| \to +\infty$ la funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n regolari e sommabili.

In particolare per $n \geq 2$, segue che $\mathcal{F}[x(t)]$ é sommabile su $\mathbb{R}$.

Trasformata della derivata d'ordine n

Conseguenze

$$\mathcal{F}[x(t)] = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) \quad |\omega| \to +\infty$$

se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$.
Per $|\omega| \to +\infty$ la funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n regolari e sommabili.
In particolare per $n \geq 2$, segue che $\mathcal{F}[x(t)]$ é sommabile su $\mathbb{R}$.

Esempio

$x(t) = \frac{1}{t^2+1}$ è sommabile e quindi è trasformabile.

Trasformata della derivata d'ordine n

Conseguenze

$$\mathcal{F}[x(t)] = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) \quad |\omega| \to +\infty$$

se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$.

Per $|\omega| \to +\infty$ la funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n regolari e sommabili.

In particolare per $n \geq 2$, segue che $\mathcal{F}[x(t)]$ é sommabile su $\mathbb{R}$.

Esempio

$x(t) = \frac{1}{t^2+1}$ è sommabile e quindi è trasformabile.

Inoltre $x(t)$ è C^∞ e quindi $\mathcal{F}[x(t)] = o(\frac{1}{|\omega|^n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Trasformata della derivata d'ordine n

Conseguenze

$$\mathcal{F}[x(t)] = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right) \quad |\omega| \to +\infty$$

se $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ sono funzioni sommabili e continue su $\mathbb{R}$ e $x^{(n)}$ è continua a tratti e sommabile su $\mathbb{R}$.
Per $|\omega| \to +\infty$ la funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n regolari e sommabili.
In particolare per $n \geq 2$, segue che $\mathcal{F}[x(t)]$ é sommabile su $\mathbb{R}$.

Esempio

$x(t) = \frac{1}{t^2+1}$ è sommabile e quindi è trasformabile.
Inoltre $x(t)$ è C^∞ e quindi $\mathcal{F}[x(t)] = o(\frac{1}{|\omega|^n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Vedremo nell'esame di Metodi matematici per l'Ingegneria che $\mathcal{F}[x(t)](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.
L'espressione esplicita di $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ conferma quanto trovato teoricamente, i.e. che $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di tutte le potenze $\frac{1}{|\omega|^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Derivata della Trasformata

Proposizione

Se $x(t)$, $tx(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)x(t)](\omega)$$

Derivata della Trasformata

Proposizione

Se $x(t)$, $tx(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)x(t)](\omega)$$

Conseguenze

Ricordando che $\mathcal{F}[(-jt)x(t)](\omega)$ è una funzione continua ne segue che $\widehat{x}(\omega)$ è C^1 se $x(t)$, $tx(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$.

Derivata d'ordine n delle trasformata

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile n volte su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$$

Derivata d'ordine *n* delle trasformata

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile n volte su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$$

Conseguenze

Ricordando che $\mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$ è una funzione continua ne segue che $\widehat{x}(\omega)$ è C^n se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$.

Derivata d'ordine n delle trasformata

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile n volte su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$$

Conseguenze

Ricordando che $\mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$ è una funzione continua ne segue che $\widehat{x}(\omega)$ è C^n se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$.
Se $t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ per ogni n, allora $\widehat{x}(\omega)$ è C^∞.

Derivata d'ordine n delle trasformata

Proposizione

Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$, allora $\widehat{x}(\omega)$ è derivabile n volte su $\mathbb{R}$ e

$$\widehat{x}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$$

Conseguenze

Ricordando che $\mathcal{F}[(-jt)^n x(t)](\omega)$ è una funzione continua ne segue che $\widehat{x}(\omega)$ è C^n se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$.
Se $t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ per ogni n, allora $\widehat{x}(\omega)$ è C^∞.

Se $x(t) = O\left(1/|t|^{n+2}\right)$ per $|t| \to$ allora $\widehat{x}(\omega)$ ammette la derivata d'ordine n.
Ricordiamo che

$$x(t) = O\left(1/|t|^{n+2}\right) \Leftrightarrow |x(t)| \leq \frac{C}{|t|^{n+2}} \quad \text{per } |t| \text{ grande}$$

Abbiamo visto che

1. Per $|\omega| \to +\infty$ la funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n regolari e sommabili.
2. $\widehat{x}(\omega)$ è C^n se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$.

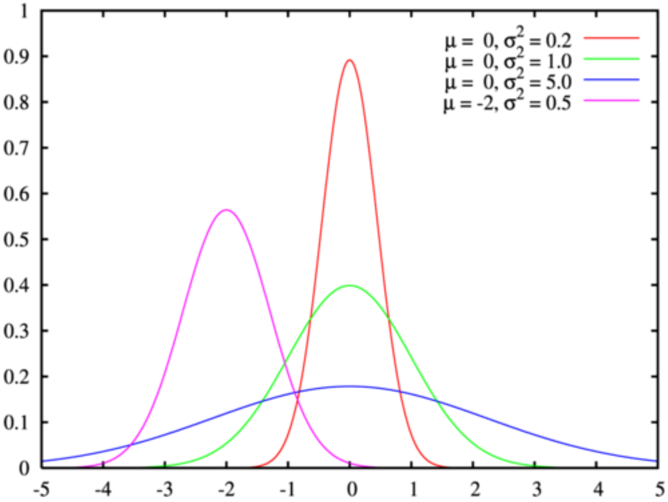
Abbiamo visto che

1. Per $|\omega| \to +\infty$ la funzione $\mathcal{F}[x(t)](\omega)$ va a zero più velocemente di $\frac{1}{|\omega|^n}$ se $x(t)$ ha le derivate fino all'ordine n regolari e sommabili.
2. $\widehat{x}(\omega)$ è C^n se $x(t), tx(t), \cdots, t^n x(t)$ sono funzioni sommabili su $\mathbb{R}$.

Si può dire un po' grossolanamente che la trasformata di Fourier scambia regolarità con velocità di annullamento all'infinito.

Gaussiana

$$x(t) = e^{-\frac{|t-\mu|^2}{\sigma^2}}$$



Trasformata della gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

Trasformata della gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

Trasformata della gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

Trasformata della gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R$$

$$= \pi\left(-e^{-R^2}+1\right)$$

Trasformata della gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R$$

$$= \pi \left(-e^{-R^2} + 1\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \pi \left(-e^{-R^2} + 1\right) = \pi$$

Trasformata della gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$. Tale funzione è sommabile e quindi è trasformabile.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

dove $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$\int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R$$

$$= \pi\left(-e^{-R^2} + 1\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \pi\left(-e^{-R^2} + 1\right) = \pi$$

Ricordando le formule di riduzione e osservando che $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-(x^2)} e^{-(y^2)}$ si ha

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy == \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy\right)$$

quindi l'asserto.

Trasformata della Gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$x'(t) = -2tx(t)$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tx(t)](\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$x'(t) = -2tx(t)$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tx(t)](\omega)$$

$$j\omega\widehat{x}(\omega) = -2j\widehat{x}'(\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$x'(t) = -2tx(t)$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tx(t)](\omega)$$

$$j\omega\widehat{x}(\omega) = -2j\widehat{x}'(\omega)$$

$$\widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega)$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

$$x'(t) = -2tx(t)$$

$$\mathcal{F}[x'(t)](\omega) = \mathcal{F}[-2tx(t)](\omega)$$

$$j\omega\widehat{x}(\omega) = -2j\widehat{x}'(\omega)$$

$$\widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega)$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega) \\ \widehat{x}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega) \\ \widehat{x}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega) \\ \\ \widehat{x}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{x}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{x}'(\omega)}{\widehat{x}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega) \\ \widehat{x}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{x}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{x}'(\omega)}{\widehat{x}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Integrando si ha

$$\ln(|\widehat{x}(\omega)|) = -\frac{\omega^2}{4} + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega) \\ \widehat{x}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{x}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{x}'(\omega)}{\widehat{x}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Integrando si ha

$$\ln(|\widehat{x}(\omega)|) = -\frac{\omega^2}{4} + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$|\widehat{x}(\omega)| = k_2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad k_2 > 0$$

Trasformata della Gaussiana

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{x}'(\omega) = -\frac{\omega}{2}\widehat{x}(\omega) \\ \\ \widehat{x}(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Dalla condizione iniziale si evince che $\widehat{x}(0) \equiv 0$ non è soluzione. Per cercare soluzioni non nulle l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\widehat{x}'(\omega)}{\widehat{x}(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Integrando si ha

$$\ln(|\widehat{x}(\omega)|) = -\frac{\omega^2}{4} + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$|\widehat{x}(\omega)| = k_2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad k_2 > 0$$

$$\widehat{x}(\omega) = k_2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad k_2 \neq 0$$

Ricordando che $\widehat{x}(0) = \sqrt{\pi}$ si ha

$$\widehat{x}(\omega) = \widehat{x}(0) e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

È ancora una gaussiana!

Trasformata della Gaussiana: calcolo diretto

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-j\omega t}\, dt$$

Trasformata della Gaussiana: calcolo diretto

Sia $x(t) = e^{-t^2}$.

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t+j\frac{\omega}{2}\right)^2}\, dt$$

$$=^{(\sigma=t+j\frac{\omega}{2})} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2}\, d\sigma = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Trasformata della Gaussiana

Sia $x_a(t) = e^{-at^2}$ $\quad a > 0$. Bisogna pensarla come funzione riscalata e quindi $x_a(t) = e^{-(\sqrt{a}t)^2}$.

$$\mathcal{F}[x_a(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathcal{F}[x(t)]\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

È ancora una gaussiana!

Ulteriore trasfomata notevole

Nell'esame di Metodi matematici per l'Ingegneria vedremo

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

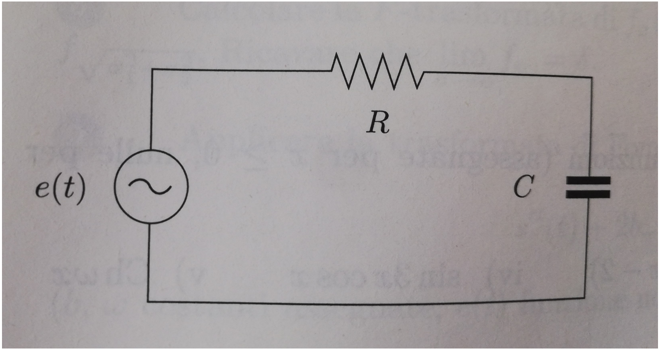
Ulteriore trasfomata notevole

Nell'esame di Metodi matematici per l'Ingegneria vedremo

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

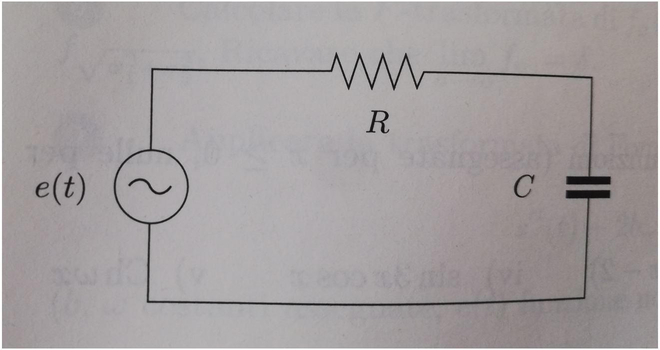
Esercizio: provare che $\frac{1}{1+t^2}$ è sommabile.

Studio del circuito RC con generatore di tensione



Il circuito RC mostrato in figura è composto da una resistenza e da un condensatore carico di capacità C. Nel nostro caso è presente una sorgente esterna di tensione $e(t)$.

Studio del circuito RC con generatore di tensione



Il circuito RC mostrato in figura è composto da una resistenza e da un condensatore carico di capacità C. Nel nostro caso è presente una sorgente esterna di tensione $e(t)$.

Sia $s(t)$ la tensione alle facce opposte del condizionatore. Essa verifica la seguente equazione differenziale

$$RCs'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{(equazione di Kirchhoff)}.$$

Infatti $e(t) = R\,i(t) + s(t)$ con l'intensità di corrente $i(t)$ data da $i(t) = C\,s'(t)$.

Studio del circuito RC con generatore di tensione

$$RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier (come funzione della frequanza f) ad entrambi i membri

$$RC\, \mathcal{F}[s'(t)](f) + \mathcal{F}[s(t)](f) = \mathcal{F}[e(t)](f)$$

$$RC\, 2\pi j f\, \widehat{s}(f) + \widehat{s}(f) = \widehat{e}(f)$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione

$$RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier (come funzione della frequanza f) ad entrambi i membri

$$RC\, \mathcal{F}[s'(t)](f) + \mathcal{F}[s(t)](f) = \mathcal{F}[e(t)](f)$$

$$RC\, 2\pi jf\, \widehat{s}(f) + \widehat{s}(f) = \widehat{e}(f)$$

Si ricava che

$$\widehat{s}(f) = \frac{\widehat{e}(f)}{1 + RC2\pi jf} := \widehat{e}(f)\widehat{h}(f)$$

dove $\widehat{h}(f) = \frac{1}{1+RC2\pi jf}$ è detta funzione di trasferimento del circuito e permette di ottenere $s(t)$ dalla conoscenza di $e(t)$.

Studio del circuito RC con generatore di tensione

$$RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier (come funzione della frequanza f) ad entrambi i membri

$$RC\, \mathcal{F}[s'(t)](f) + \mathcal{F}[s(t)](f) = \mathcal{F}[e(t)](f)$$

$$RC\, 2\pi jf\, \widehat{s}(f) + \widehat{s}(f) = \widehat{e}(f)$$

Si ricava che

$$\widehat{s}(f) = \frac{\widehat{e}(f)}{1 + RC2\pi jf} := \widehat{e}(f)\widehat{h}(f)$$

dove $\widehat{h}(f) = \frac{1}{1+RC2\pi jf}$ è detta funzione di trasferimento del circuito e permette di ottenere $s(t)$ dalla conoscenza di $e(t)$.

Dalla formula sulla trasformata della convoluzione segue che

$$s(t) = (h * e)(t)$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione

Nel nostr caso

$$\widehat{h}(f) = \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} 2\pi j f}$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione

Nel nostr caso

$$\widehat{h}(f) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\frac{1}{RC}2\pi jf}$$

Ricordando che se $a > 0$ e $u(t) = 1$ per $t > 0$ e $u(t) = 0$ per $t < 0$, allora $\mathcal{F}[e^{-at}u(t)](f) = \frac{1}{a+2j\pi f}$, si ha che

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t).$$

Ne segue che

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau)\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau.$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau)\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau =^{t-\tau=\sigma} \int_0^{+\infty} e(\sigma)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\sigma}{RC}}\,d\sigma$$

Se $e(t) = 1$ se $0 < t < T$ e zero altrove, allora

- per $t \leq T$ si ha

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{t} A\frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma = A\int_0^{t} \frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma$$

$$= A\left[e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\right]_0^t = A(1-e^{\frac{-t}{RC}})$$

Studio del circuito RC con generatore di tensione

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^{+\infty} e(t-\tau)\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau \stackrel{t-\tau=\sigma}{=} \int_0^{+\infty} e(\sigma)\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\sigma}{RC}}\,d\sigma$$

Se $e(t) = 1$ se $0 < t < T$ e zero altrove, allora

- per $t \leq T$ si ha

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^t A\frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma = A\int_0^t \frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma$$

$$= A\left[e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\right]_0^t = A(1-e^{\frac{-t}{RC}})$$

- per $t \geq T$ si ha

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_0^T A\frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma = A\int_0^T \frac{1}{RC}e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\,d\sigma$$

$$= A\left[e^{\frac{\sigma-t}{RC}}\right]_0^T = A(e^{\frac{T-t}{RC}} - e^{\frac{-t}{RC}}) = Ae^{\frac{-t}{RC}}(e^{\frac{T}{RC}}-1)$$

Funzioni a decrescenza rapida

Le funzioni a decrescenza rapida sono delle funzioni regolari tali che le funzioni stesse e le derivate decrescono più velocemente di una qualsiasi potenza.
Tale insieme è indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ed è caratterizzato dall'importante fatto che su di esso la trasformata di Fourier è un automorfismo e grazie a questa proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate (Esame di Metodi).

Funzioni a decrescenza rapida

Le funzioni a decrescenza rapida sono delle funzioni regolari tali che le funzioni stesse e le derivate decrescono più velocemente di una qualsiasi potenza.
Tale insieme è indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ed è caratterizzato dall'importante fatto che su di esso la trasformata di Fourier è un automorfismo e grazie a questa proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate (Esame di Metodi).

Abbiamo visto che tanto più veloce $x(t)$ tende a zero per $|t| \to \infty$ tanto più è regolare $\widehat{x}(\omega)$, quindi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è un buon candidato affinchè la trasformata di Fourier sia un automorfismo.

Funzioni a decrescenza rapida

Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t^\alpha D^\beta x(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Funzioni a decrescenza rapida

Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t^\alpha D^\beta x(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $x(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$ è a decrescenza rapida.

Funzioni a decrescenza rapida

Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t^\alpha D^\beta x(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $x(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$ è a decrescenza rapida.

Esercizio: provare l'affermazione precedente.

Funzioni a decrescenza rapida

Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t^\alpha D^\beta x(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $x(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$ è a decrescenza rapida.

Esercizio: provare l'affermazione precedente.

Risoluzione esercizio: Facendo le derivate d'ordine n di e^{-at^2}, ci si convince che è sufficiente provare che $t^\gamma x(t)$ con $\gamma \geq 0$ è limitata $\forall t \in \mathbb{R}$.
Osservando che $\lim_{|t|\to+\infty} t^\gamma x(t) = 0$ segue che

$$|t^\gamma x(t)| < costante \quad \text{per } |t| > M$$

per un certo $M > 0$. Per $|t| \leq M$ le funzioni t^γ e $x(t)$ sono limitate e quindi

$$|t^\gamma x(t)| < costante \quad \text{per } |t| \leq M$$

Funzioni a decrescenza rapida

Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t^\alpha D^\beta x(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proprietà: $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow x(t)$ sommabile su $\mathbb{R}$ e quindi è trasformabile.

Funzioni a decrescenza rapida

Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ si dice a decrescenza rapida se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ esiste una costantte $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|t^\alpha D^\beta x(t)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proprietà: $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow x(t)$ sommabile su $\mathbb{R}$ e quindi è trasformabile.

Per dimostare la sommabilitá basta osservare che la funzione è continua e si ha

$$|t^2 x(t)| \leq C_{2,0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui segue che

$$|x(t)| \leq \frac{C_{2,0}}{|t|^2} \quad |t| > M$$

con $M > 0$. Per il teorema dei Carbinieri $\lim_{|t| \to +\infty} x(t) = 0$. Tale funzione è infinitesima con ordine almeno 2 (segue dalla stima) e quindi è sommabile.

Funzioni a decrescenza rapida

Proposizione

Se $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{F} : x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Inoltre F è un automorfismo (applicazione lineare biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Funzioni a decrescenza rapida

Proposizione

Se $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{F} : x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Inoltre F è un automorfismo (applicazione lineare biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

dimostrazione

Calcoliamo

$$\omega^\alpha D^\beta \widehat{x}(\omega) =^{\text{formula derivata della trasformata}} \omega^\alpha \mathcal{F}[(-jt)^\beta x(t)](\omega)$$

$$= (-j)^{\alpha+\beta} (j\omega)^\alpha \mathcal{F}[t^\beta x(t)](\omega)$$

Funzioni a decrescenza rapida

Proposizione

Se $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{F} : x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Inoltre F è un automorfismo (applicazione lineare biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

dimostrazione

Calcoliamo

$$\omega^\alpha D^\beta \widehat{x}(\omega) =^{\text{formula derivata della trasformata}} \omega^\alpha \mathcal{F}[(-jt)^\beta x(t)](\omega)$$

$$= (-j)^{\alpha+\beta} (j\omega)^\alpha \mathcal{F}[t^\beta x(t)](\omega)$$

$$=^{\text{formula trasformata della derivata}} (-j)^{\alpha+\beta} \mathcal{F}[D^\alpha (t^\beta x(t))](\omega)$$

Funzioni a decrescenza rapida

Proposizione

Se $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{F} : x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \widehat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Inoltre F è un automorfismo (applicazione lineare biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

dimostrazione

Calcoliamo

$$\omega^\alpha D^\beta \widehat{x}(\omega) =^{\text{formula derivata della trasformata}} \omega^\alpha \mathcal{F}[(-jt)^\beta x(t)](\omega)$$

$$= (-j)^{\alpha+\beta}(j\omega)^\alpha \mathcal{F}[t^\beta x(t)](\omega)$$

$$=^{\text{formula trasformata della derivata}} (-j)^{\alpha+\beta}\mathcal{F}[D^\alpha(t^\beta x(t))](\omega)$$

Poichè $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $D^\alpha(t^\beta x(t)) = \sum_{k=0}^{\alpha} D^k t^\beta D^{\alpha-k} x(t)$ ne segue che $D^\alpha(t^\beta x(t)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e quindi è sommabile. Inoltre dalla stima precedente si ha

$$\left|\omega^\alpha D^\beta \widehat{x}(\omega)\right| = \left|\mathcal{F}[D^\alpha(t^\beta x(t))](\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} D^\alpha(t^\beta x(t)) e^{-j\omega t}\, dt\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|D^\alpha(t^\beta x(t))\right|\, dt \leq \text{costante}$$

Funzioni a decrescenza rapida

Osservando che abbiamo provato che se $x(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{x}(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ovvero l'insieme delle immagini di $\mathcal{F}$ è contenuto in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Funzioni a decrescenza rapida

Osservando che abbiamo provato che se $x(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\widehat{x}(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ovvero l'insieme delle immagini di $\mathcal{F}$ è contenuto in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ricordando che

$$\widehat{\widehat{x}}(t) = 2\pi x(-t)$$

allora

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{x}}(-t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\widehat{x}(\omega)](-t)$$

i.e. la generica funzione $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è la trasformata di Fourier di un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ovvero l'operatore $\mathcal{F}$ è suriettivo. L'iniettività è conseguenza della definizione: funzioni regolari diverse hanno diversa trasformata di Fourier. Infine è chiaro che l'operatore $\mathcal{F}$ è un'applicazione lineare e quindi è un'automorfismo.

Testi consigliati:

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa - Analisi matematica 2 - Zanichelli
- G.C. Barozzi - Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione - Zanichelli

Si possono inoltre consultare:

- M. Codegone - Metodi Matematici per l'Ingegneria - Zanichelli
- S. Abenda, S. Matarasso - Metodi Matematici - Progetto Leonardo