MATEMATICA FINANZIARIA

Zelda Marino

November 16, 2021

La Duration

- La duration di Macaulay;
- momenti di secondo ordine;
- variazione relativa (semielasticità);
- elasticità;
- convexity;
- convessità relativa.

Premessa

Chi investe in un titolo a reddito fisso, quale un'obbligazione, nel tempo vedrá variare il valore del proprio investimento.

Il valore di mercato é soggetto a fluttuazioni, a causa delle variazioni delle condizioni del mercato, quali i tassi di interesse e la percezione della possibile insolvenza dell'emittente rispetto a qualche pagamento.

Ad ogni epoca, il valore di mercato di un'obbligazione é influenzato dai rendimenti correnti quotati sul mercato obbligazionario $\longrightarrow$ RISCHIO DI TASSO.

Scadenza

Maturity

$t_m \Rightarrow$ scadenza (*maturity*).
indica la data in cui il contratto si può considerare definitivamente concluso.

Vita a scadenza

$t_m - t \Rightarrow$ *vita a scadenza* (*time to maturity*), o *vita residua*.
rappresenta la durata complessiva dell'operazione di scambio.

trascurano l'effetto finanziario dovuto ai pagamenti intermedi e forniscono una caratterizzazione completa della distribuzione temporale delle poste solo nel caso di titoli privi di cedole.

1938 l'economista canadese *Frederick Macaulay*, nel suo libro *The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Proces in the United States since 1856* pubblicó uno studio particolareggiato sull'andamento dei tassi di ineteresse dal 1856 al 1938.

Secondo Macauley, “solo i prestiti a breve termine possono essere considerati assolutamente privi di rischio (di tasso)”. Macauley definí, quindi l'arco temporale rispetto al quale valutare l'assenza di rischio.

Esempio

Consideriamo due prestiti. Per entrambi la durata complessiva é 10 anni, l'importo iniziale é di 100 euro e il tasso effettivo di interesse su base annua é il 10%:

- un unico pagamento di 259.37 dopo 10 anni $(100 = 259.37 \cdot 1.1^{-10})$;
- un pagamento di 100 euro dopo 1 anno e uno di 23.60 dopo 10 anni $(100 = 100 \cdot 1.1^{-1} + 23.60 \cdot 1.1^{-10})$

Macauley volle definire una misura in base alla quale il prestito 1 verrebbe classificato con "arco temporale piú lungo" rispetto al prestito 2, in quanto per il primo prestito "la maggior parte" del pagamento che restituisce il prestito é versata piú tardi.
Macauley chiamó questa misura temporare DURATA MEDIA FINANZIARIA.

La duration di Macaulay

Si consideri il contratto finanziario $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Sia t l'istante di valutazione e $v(t,s)$ la struttura dei prezzi a pronti in vigore sul mercato al tempo t. La *duration* al tempo t di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ è definita come:

$$D(t; \boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t, t_k)} .$$

La duration con struttura per scadenza piatta

Si consideri il contratto finanziario $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Sia t l'istante di valutazione e i il tasso annuo a pronti per tutte le scadenze.

La *duration* al tempo t di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ è definita come:

$$D(t; \boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}\,.$$

La duration di Macaulay

$$D(t;\boldsymbol{x}) \quad = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)}$$

La duration di Macaulay

$$
\begin{aligned}
D(t;\boldsymbol{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} \\
&= \frac{(t_1 - t)\, x_1\, v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + \frac{(t_m - t)\, x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)}
\end{aligned}
$$

La duration di Macaulay

$$
\begin{aligned}
D(t;\boldsymbol{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} \\
&= \frac{(t_1 - t)\, x_1\, v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + \frac{(t_m - t)\, x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} \\
&= (t_1 - t)\frac{x_1\, v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + (t_m - t)\frac{x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)}
\end{aligned}
$$

La duration di Macaulay

$$
\begin{aligned}
D(t;\boldsymbol{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)} \\
&= \frac{(t_1 - t)\, x_1\; v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + \frac{(t_m - t)\, x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)} \\
&= (t_1 - t)\frac{x_1\, v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)} + \ldots + (t_m - t)\frac{x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)}
\end{aligned}
$$

posto

$$
p_k = \frac{x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)}
$$

La duration di Macaulay

$$
\begin{aligned}
D(t;\boldsymbol{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)} \\
&= \frac{(t_1 - t)\, x_1\; v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\; v(t,t_k)} + \ldots + \frac{(t_m - t)\, x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\; v(t,t_k)} \\
&= (t_1 - t)\frac{x_1\; v(t,t_1)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\; v(t,t_k)} + \ldots + (t_m - t)\frac{x_m\, v(t,t_m)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\; v(t,t_k)}
\end{aligned}
$$

posto

$$
p_k = \frac{x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}\; x_k\, v(t,t_k)}
$$

la duration si può anche scrivere:

$$
D(t;\boldsymbol{x}) = (t_1 - t)\, t_1 + \ldots + (t_m - t)\, p_m = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k \,,
$$

La duration di Macaulay

$$D(t;x) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k \qquad p_k = \frac{x_k\, v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, v(t,t_k)}$$

la duration è la media ponderata delle vite a scadenza delle poste del flusso, dove i pesi sono i valori attuali percentuali dei flussi futuri.

Il peso p_k é il contributo relativo del pagamento effettuato al tempo t_k al valore attuale complessivo dei pagamenti del titolo.

A paritá di valore attuale complessivo (il denominatore), tanto piú elevato il pagamento effettuato al tempo t_k, tanto piú elevato sará il suo contributo al valore attuale complessivo e dunque tanto piú elevato sará p_k. Questo comporterá un maggior peso assegnato all'epoca t_k rispetto alle altre epoche.

$$D(t;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, p_k\,,$$

$D(t;\boldsymbol{x})$ si misura in unità temporali.

Si può pensare a $D(t;\boldsymbol{x})$ come distanza da t del baricentro della distribuzione temporale delle masse p_k; fornisce cioè il *momento del primo ordine* della distribuzione $\{p_k\}$.

Ne risulta immediata la proprietà:

$$t_1 - t \le D(t;\boldsymbol{x}) \le t_m - t\,,$$

dato che il baricentro non può essere esterno al segmento sul quale sono distribuite le masse.

Duration di uno ZCB

$$D(t;\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)\,x_k\,v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}\,x_k\,v(t,t_k)} = \frac{(t_m - t)\,x_m\,v(t,t_m)}{x_m\,v(t,t_m)} = t_m - t$$

L'uguaglianza della duration con la vita a scadenza di una delle poste di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ può aversi solo nel caso degenere di "massa concentrata", cioè di un flusso di tipo ZCB.

Esempio

Si consideri il flusso:

$$x/t = \{10, 20, 30\}/\{1, 2.5, 3.3\}.$$

Sia data la struttura per scadenza dei prezzi:

$$v(0,1) = 0.9512$$
$$v(0,2.5) = 0.7316$$
$$v(0,3.3) = 0.5801$$

Calcolare la duration del flusso.

Il valore attuale del flusso risulta:

$$V(0;\boldsymbol{x}) = 10 \times 0.9512 + 20 \times 0.7316 + 30 \times 0.5801 =$$

$$= 41.547 \text{ euro}\,;$$

quindi i pesi p_k sono espressi da:

$$\begin{aligned} p_1 &= 10 \times 0.9512/41.547 = 0.22895\,, \\ p_2 &= 20 \times 0.7316/41.547 = 0.35218\,, \\ p_3 &= 30 \times 0.5801/41.547 = 0.41887\,. \end{aligned}$$

Il valore della duration risulta:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = 1 \times 0.22895 + 2.5 \times 0.35218 + 3.3 \times 0.41887 =$$

$$= 2.492 \text{ anni}\,.$$

Se si considerasse il flusso composto dall'unica posta $x_1 = 10$ in $t_1 = 1$, cioè lo ZCB annuale con valore facciale di 10 euro, il valore attuale sarebbe:

$$V(0; x) = 10\, v(0, 1) = 10 \times 0.9512 = 9.512 \text{ euro}\,;$$

si avrebbe l'unico peso:

$$p_1 = 9.512/9.512 = 1\,,$$

e la duration risulterebbe $D(0; x) = 1 \times 1 = 1$ anno; sarebbe cioè uguale alla vita a scadenza $t_1 - t$ del titolo, indipendentemente dalla struttura dei tassi.

Esempio

Sia in vigore sul mercato, al tempo $t = 0$, la struttura per scadenza dei tassi di interesse:

$$i(0,1) = 4.9958,$$
$$i(0,2) = 4.8646,$$
$$i(0,3) = 4.7336$$
$$i(0,4) = 4.6028$$
$$i(0,5) = 4.4721$$

Si calcoli in corrispondenza la duration del titolo a cedola fissa che garantisce il flusso di pagamenti:

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{6, 6, 6, 6, 106\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(tempi misurati in anni).

Poniamo $t = 0$. $m = 5$. La duration può essere scritta come:

$$D(t; \boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{5} k\, x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k}}{\sum_{k=1}^{5} x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k}} \,,$$

Il valore attuale del flusso, cioè il denominatore, è:

$$V(0; \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{5} x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k} = 106.57844 \text{ euro} \,.$$

La duration risulta:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{5} k\, x_k \,[1 + i(0,k)]^{-k}}{106.57844} = 4.4869 \text{ anni} \,.$$

■

Esempio

Il flusso $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ utilizzato nell'esempio precedente caratterizza un titolo a cedola fissa con scadenza quinquennale, valore facciale di 100 euro e cedola annuale uguale a 6 euro.

Dato che il tasso nominale di questo titolo (6%) è uniformemente più elevato della struttura dei tassi usata per la valutazione, il valore attuale risulta notevolmente superiore al valore di parità (100 euro).

Se si considera, al contrario, un titolo con bassa cedola (un "deep discount bond"), caratterizzato a esempio dal flusso:

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{1, 1, 1, 1, 101\}/\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

il valore attuale scende sotto la parità, essendo $V(0; \boldsymbol{x}) = 84.72329$, e la duration risulta $D(0; \boldsymbol{t}) = 4.8924$; approssima cioè (per difetto) la duration del titolo quinquennale a cedola nulla.

La duration con struttura piatta

Ritorniamo un attimo alla duration con struttura piatta (*flat yield duration*):

$$D(t;x) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-(t_k - t)}} \,.$$

Nei casi in cui è possibile ricavare, unico, il tasso interno di rendimento i^* del flusso x/t sulla base del prezzo di mercato, la duration calcolata con struttura piatta al livello i^* fornisce una soddisfacente approssimazione della duration calcolata sulla struttura.

Momenti di secondo ordine

Momento di secondo ordine, o *duration di secondo ordine*:

$$D^{(2)}(t; \boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2 \, x_k \, v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} \, x_k \, v(t, t_k)} \, ,$$

o, con notazione più compatta, dalla:

$$D^{(2)}(t; \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2 \, p_k \, .$$

La duration di secondo ordine esprime la media pesata dei quadrati degli “scarti temporali” $t_k - t$ e fornisce quindi una *misura di dispersione temporale* del flusso $\boldsymbol{x}$ rispetto a t.

Dato che $x_k \geq 0$, $D^{(2)}(t; \boldsymbol{x})$ non può assumere valori negativi:

$$0 \leq (t_1 - t)^2 \leq D^{(2)}(t; \boldsymbol{x}) \leq (t_m - t)^2 ,$$

e coincide con il quadrato della vita a scadenza di una delle poste di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ solo nel caso di massa concentrata.

La duration di secondo ordine ha dimensioni del tipo tempo^2, dato che esprime una media di tempi al quadrato. Calcolandone la radice quadrata, si definisce l'indice temporale:

$$\sqrt{D^{(2)}(t; \boldsymbol{x})} ,$$

noto come *dispersione temporale* del flusso $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$, che ha per dimensioni un tempo.

Analogia fisica

$D^{(2)}(t; x)$ rappresenta il momento d'inerzia della distribuzione di masse $\{p_k\}$, qualora questa fosse pensata in rotazione intorno a un asse perpendicolare all'asse dei tempi e passante per il punto t.

Risulta quindi intuitivo che il momento d'inerzia, che esprime la tendenza del sistema di masse a conservare la propria velocità di rotazione, risulta tanto più elevato quanto più le masse risultano "lontane" tra loro.

Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} ,$$

struttura dei rendimenti piatta:

$$V(t; \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-(t_k - t)} ,$$

Considerare variazioni di *i* significa ipotizzare variazioni dello stato del mercato.

$$x_k \geq 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,, \exists k : x_k > 0\,,$$

Si ponga $t = 0$.

$$V(0; \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{-\delta t_k}\,,$$

che fornisce il prezzo del flusso in termini del tasso di valutazione i, o, equivalentemente, dell'intensità istantanea di interesse $\delta = \log(1+i)$.

Una volta fissato il flusso $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$, studiamo il prezzo V al variare di i, o di δ, (ipotizzando un mercato che evolve per strutture piatte).

$$V(0; \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k \, e^{-\delta t_k} \, ,$$

Risulta:

$$V(0;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k \, e^{-\delta t_k} \,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0 \,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k \,, \quad \lim_{i \to \infty} V(i) = 0 \,;$$

$$V(0;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}\,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

e, analogamente:

$$V(\delta) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{\delta\to\infty} V(\delta) = 0\,.$$

$$V(0;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}\,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

e, analogamente:

$$V(\delta) > 0\,, \quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,, \quad \lim_{\delta\to\infty} V(\delta) = 0\,.$$

La derivata prima e seconda rispetto a i hanno la forma:

$$V'(i) = -\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,(1+i)^{-t_k-1}\,,$$

$$V(0;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,(1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{m} x_k\,e^{-\delta t_k}\,,$$

Risulta:

$$V(i) > 0\,,\quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,,\quad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0\,;$$

e, analogamente:

$$V(\delta) > 0\,,\quad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,,\quad \lim_{\delta\to\infty} V(\delta) = 0\,.$$

La derivata prima e seconda rispetto a i hanno la forma:

$$V'(i) = -\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,(1+i)^{-t_k-1}\,,$$

$$V''(i) = \sum_{k=1}^{m} t_k\,(t_k+1)\,x_k\,(1+i)^{-t_k-2}\,;$$

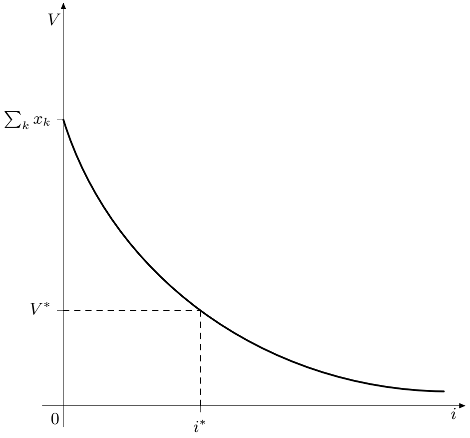
mentre quelle rispetto a δ sono espresse dalle:

$$V'(\delta) = -\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, e^{-\delta t_k} \, ,$$

$$V''(\delta) = \sum_{k=1}^{m} t_k^2 \, x_k \, e^{-\delta t_k} \, .$$

La funzione $V(i)$ (la funzione $V(\delta)$)

- assume solo valori positivi;
- coincide con la somma delle poste per $i = 0$ (per $\delta = 0$);
- è funzione strettamente decrescente e convessa di i (di δ).



Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Risulta:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k}}$$

Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Risulta:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k}}$$

$$= -\frac{1}{1+i} \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k \, x_k \, (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k}}$$

Analisi di sensitività del prezzo - Variazione relativa (semielasticità)

È definita come:

$$\frac{V'(i)}{V(i)}.$$

La variazione relativa o semielasticità (tradizionale derivata logaritmica) misura la rapidità di variazione del prezzo per unità di capitale.

Risulta:

$$\begin{aligned}\frac{V'(i)}{V(i)} &= -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-t_k}} \\ &= -\frac{1}{1+i}\,\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, (1+i)^{-t_k}} \\ &= -\frac{1}{1+i}\, D(0; \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

e:

$$\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k\, e^{-\delta t_k}} = -D(0; \boldsymbol{x})\,.$$

La variazione relativa è strettamente collegata alla duration del flusso calcolata in base a una struttura piatta; ed è nota come *modified duration*.
Nei casi in cui la semielasticità viene definita rispetto a δ, si ha la perfetta coincidenza (a meno del segno) col concetto di flat yield curve duration.

Convexity

È definita come:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \, t_k \, (t_k + 1) \, x_k \, (1+i)^{-t_k - 2}}{\sum_{k=1}^{m} \, x_k \, (1+i)^{-t_k}} \, ,$$

La *convexity* del prezzo è una misura di convessità espressa in unità di capitale.

Per la convexity rispetto a δ si ha:

$$\frac{V''(\delta)}{V(\delta)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \, t_k^2 \, x_k \, e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} \, x_k \, e^{-\delta t_k}} = D^{(2)}(0; \boldsymbol{x}) \, .$$

La convessità della funzione prezzo risulta quindi collegata con gli indici di dispersione. In particolare, la convexity, espressa come funzione dell'intensità δ, coincide con la duration di secondo ordine del flusso $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$.

Convessità relativa

È definita come:

$$\frac{V''(i)}{V'(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\,(t_k+1)\,x_k\,(1+i)^{-t_k-2}}{\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,(1+i)^{-t_k-1}}\,,$$

La convessità relativa, nota anche come *volatility convexity*, esprime la convessità della funzione prezzo in unità di variazione del prezzo.

Per la convessità relativa rispetto a δ si ha:

$$\frac{V''(\delta)}{V'(\delta)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k^2\,x_k\,e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{m} t_k\,x_k\,e^{-\delta t_k}} = -\frac{D^{(2)}(0;\boldsymbol{x})}{D(0;\boldsymbol{x})}$$

e quindi è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra duration del primo ordine e duration del secondo ordine di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$.

Esempio

Si consideri il titolo che garantisce il flusso:

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{5, 5, 5, 105\}/\{1, 2, 3, 4\}\,.$$

Con riferimento a una struttura piatta al livello $i = 5\%$ annuo, cioè $\delta = \log 1.05 = 0.04879$ anni^{-1}, negli esempi precedenti si è ricavato, in $t = 0$:

$$V(0; \boldsymbol{x}) = 100\,; \quad D(0; \boldsymbol{x}) = 3.72325\,; \qquad D^{(2)}(0; \boldsymbol{x}) = 14.43915\,.$$

Rispetto allo stesso valore di *i* e di δ, si ricava la variazione relativa:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{1.05} \times 3.72325 = -3.54595\,,$$

$$\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -3.72325\,,$$

Si ricava la convexity:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = \frac{1}{(1+i)^2}\left[D^{(2)}(0,\boldsymbol{x}) + D(0;\boldsymbol{x})\right]$$
$$= \frac{1}{1.05^2} \times (14.43915 + 3.72325) = 16.47383\,,$$
$$\frac{V''(\delta)}{V(\delta)} = 14.43915\,,$$

e la convessità relativa:

$$\frac{V''(i)}{V'(i)} = -\frac{1}{1+i}\left[\frac{D^{(2)}(0;\boldsymbol{x})}{D(0;\boldsymbol{x})} + 1\right]$$
$$= -\frac{1}{1.05} \times \left(\frac{14.43915}{3.72325} + 1\right) = -4.64582\,,$$
$$\frac{V''(\delta)}{V'(\delta)} = -\frac{D^{(2)}(0;\boldsymbol{x})}{D(0;\boldsymbol{x})} = -3.87811\,.$$

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Per $\Delta i = 0.01$, si ha $\frac{1}{0.01} = 100$ e quindi:

$$D(0;\boldsymbol{x}) \approx -100\,\frac{\Delta V}{V}\,.$$

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Per $\Delta i = 0.01$, si ha $\frac{1}{0.01} = 100$ e quindi:

$$D(0;\boldsymbol{x}) \approx -100\,\frac{\Delta V}{V}\,.$$

Si può quindi affermare, in via approssimata, che se il titolo che garantisce il flusso $\boldsymbol{x}$ ha duration D, a seguito di un incremento di un punto percentuale del tasso di valutazione subirà una perdita di valore di circa D punti percentuali.

Osservazione

Considerando incrementi di i non troppo grandi e approssimando a 1 il fattore $1/(1+i)$, la semielasticità si può scrivere:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = -\frac{V'(i)}{V(i)} \approx -\frac{\Delta V}{V\,\Delta i}\,.$$

Per $\Delta i = 0.01$, si ha $\frac{1}{0.01} = 100$ e quindi:

$$D(0;\boldsymbol{x}) \approx -100\,\frac{\Delta V}{V}\,.$$

Si può quindi affermare, in via approssimata, che se il titolo che garantisce il flusso $\boldsymbol{x}$ ha duration D, a seguito di un incremento di un punto percentuale del tasso di valutazione subirà una perdita di valore di circa D punti percentuali.

La duration di un titolo esprime approssimativamente la perdita percentuale di prezzo subìta per un aumento dell'1% del tasso di interesse.

Osservazione

- x e y due flussi (non necessariamente definiti sullo stesso scadenzario)
- valutazione in base a una struttura piatta

Osservazione

- x e y due flussi (non necessariamente definiti sullo stesso scadenzario)
- valutazione in base a una struttura piatta

Supponiamo che le curve di prezzo dei due flussi nel piano (δ, V) siano tangenti tra loro per un valore δ^*

Osservazione

- $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due flussi (non necessariamente definiti sullo stesso scadenzario)
- valutazione in base a una struttura piatta

Supponiamo che le curve di prezzo dei due flussi nel piano (δ, V) siano tangenti tra loro per un valore δ^* allora nel punto di ascissa δ^* i due flussi $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ avranno lo stesso prezzo e stessa duration $(V'(\delta^*, \boldsymbol{x}) = V'(\delta^*, \boldsymbol{y}))$.

In generale, i flussi avranno invece diversa convexity, saranno cioè caratterizzati da un diverso indice di dispersione.

Esempio

Si ponga $t = 0$ e si consideri lo scadenzario:

$$\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, 29, 30\},$$

essendo il tempo misurato in anni. Sulle date di $\boldsymbol{t}$, si considerino i flussi:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \{\, a_5 = 164.88\,,\;\; a_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 5 \,\}\,, \\
\boldsymbol{b} &= \{\, b_1 = 55.26\,,\;\; b_9 = 122.98\,,\;\; b_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 9 \,\}\,, \\
\boldsymbol{c} &= \{\, c_1 = 95.28\,,\;\; c_{30} = 277.04\,,\;\; c_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 30 \,\}\,.
\end{aligned}$$

Esempio

Si ponga $t = 0$ e si consideri lo scadenzario:

$$\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, 29, 30\},$$

essendo il tempo misurato in anni. Sulle date di $\boldsymbol{t}$, si considerino i flussi:

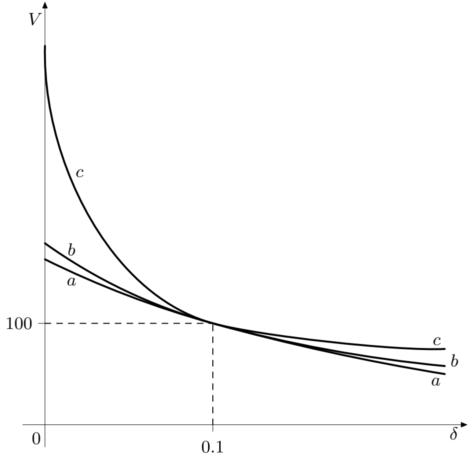
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \{\, a_5 = 164.88\,,\;\; a_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 5 \,\}\,,\\
\boldsymbol{b} &= \{\, b_1 = 55.26\,,\; b_9 = 122.98\,,\;\; b_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 9 \,\}\,,\\
\boldsymbol{c} &= \{\, c_1 = 95.28\,,\; c_{30} = 277.04\,,\;\; c_k = 0 \;\text{ per }\; k \neq 1, 30 \,\}\,.
\end{aligned}$$

Per $\delta = 0.1$ anni^{-1} i tre flussi hanno stesso valore attuale, uguale a 100, e stessa duration (5 anni).

Fissato il prezzo $V^* = 100$, il tasso $i^* = e^{0.1} - 1 = 10.517\%$ rappresenta il corrispondente tasso interno di rendimento.

Fissato il prezzo $V^* = 100$, il tasso $i^* = e^{0.1} - 1 = 10.517\%$ rappresenta il corrispondente tasso interno di rendimento.

Il flusso c è quello con convexity più alta, mentre il flusso a (corrispondente a un titolo a cedola nulla) ha la convexity minima.



Duration e dispersione di portafogli

Si considerino, al tempo t, gli n flussi non nulli:

$$\boldsymbol{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

definiti sullo scadenzario comune:

$$\boldsymbol{t}_j = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

essendo $t \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$.

Duration e dispersione di portafogli

Si considerino, al tempo t, gli n flussi non nulli:

$$\boldsymbol{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

definiti sullo scadenzario comune:

$$\boldsymbol{t}_j = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

essendo $t \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. A partire da questi flussi è sempre possibile costruire un portafoglio:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

contenente α_j unità del titolo $\boldsymbol{x}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. È significativo considerare l'insieme dei flussi $\boldsymbol{x}_j$ come un *paniere*, dal quale viene selezionato il portafoglio $\boldsymbol{\alpha}$.

Il paniere può essere formalmente rappresentato dalla matrice $n \times m$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Il paniere può essere formalmente rappresentato dalla matrice $n \times m$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Il flusso $\boldsymbol{z}$ dei pagamenti generati dal portafoglio si ottiene sommando, per la generica scadenza k, tutte le poste esigibili in t_k dei titoli del paniere, prese secondo la relativa quota di composizione. Si ha cioè:

$$\boldsymbol{z}/\boldsymbol{t} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

essendo:

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, x_{jk} \, , \quad k = 1, 2, \ldots, m \, .$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t; \boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t, t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t, t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk} \right] =$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t; \boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t, t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t, t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v(t, t_k)\, \alpha_j\, x_{jk}$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\, \alpha_j\, x_{jk}$$

Invertendo l'ordine delle operazioni di somma, si può anche scrivere:

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\,\alpha_j\, x_{jk}$$

Invertendo l'ordine delle operazioni di somma, si può anche scrivere:

$$V(t;\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[\sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, x_{jk}\right]$$

Il valore in t del portafoglio è dato da:

$$V(t;\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, z_k = \sum_{k=1}^{m} v(t,t_k) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v(t,t_k)\,\alpha_j\, x_{jk}$$

Invertendo l'ordine delle operazioni di somma, si può anche scrivere:

$$V(t;\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[\sum_{k=1}^{m} v(t,t_k)\, x_{jk}\right] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, V(t;\boldsymbol{x}_j)$$

Il valore attuale del portafoglio può quindi essere calcolato a partire dal valore dei flussi componenti, effettuandone la combinazione lineare con coefficienti uguali alle quote di composizione.

La durata media finanziaria del generico flusso $\boldsymbol{x}_j$ é:

$$D(t;\boldsymbol{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t, t_k)}{V(t;\boldsymbol{x}_j)} \,,$$

La durata media finanziaria del generico flusso $\boldsymbol{x}_j$ é:

$$D(t; \boldsymbol{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t, t_k)}{V(t; \boldsymbol{x}_j)}\,,$$

e la durata media finanziaria del flusso $\boldsymbol{z}$ generato dal portafoglio $\boldsymbol{\alpha}$ è:

$$D(t; \boldsymbol{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, z_k\, v(t, t_k)}{V(t; \boldsymbol{z})}\,.$$

La durata media finanziaria del generico flusso $\boldsymbol{x}_j$ é:

$$D(t;\boldsymbol{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{x}_j)}\,,$$

e la durata media finanziaria del flusso $\boldsymbol{z}$ generato dal portafoglio $\boldsymbol{\alpha}$ è:

$$D(t;\boldsymbol{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, z_k\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{z})}\,.$$

Si ha:

$$D(t;\boldsymbol{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right]\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{z})}$$

La durata media finanziaria del generico flusso $\boldsymbol{x}_j$ é:

$$D(t;\boldsymbol{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{x}_j)}\,,$$

e la durata media finanziaria del flusso $\boldsymbol{z}$ generato dal portafoglio $\boldsymbol{\alpha}$ è:

$$D(t;\boldsymbol{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, z_k\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{z})}\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} D(t;\boldsymbol{z}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_{jk}\right]\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{z})} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \left[\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)\right]}{V(t;\boldsymbol{z})}\,. \end{aligned}$$

moltiplico e divido per $V(t;\boldsymbol{x}_j)$

$$D(t;\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \frac{V(t;\boldsymbol{x}_j)}{V(t;\boldsymbol{z})} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t)\, x_{jk}\, v(t,t_k)}{V(t;\boldsymbol{x}_j)} \, ,$$

moltiplico e divido per $V(t; \boldsymbol{x}_j)$

$$D(t; \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \frac{V(t; \boldsymbol{x}_j)}{V(t; \boldsymbol{z})} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \, x_{jk} \, v(t, t_k)}{V(t; \boldsymbol{x}_j)} \, ,$$

posto:

$$p_j = \frac{\alpha_j \, V(t; \boldsymbol{x}_j)}{V(t; \boldsymbol{z})} \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

moltiplico e divido per $V(t; \boldsymbol{x}_j)$

$$D(t; \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \frac{V(t; \boldsymbol{x}_j)}{V(t; \boldsymbol{z})} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \, x_{jk} \, v(t, t_k)}{V(t; \boldsymbol{x}_j)} \, ,$$

posto:

$$p_j = \frac{\alpha_j \, V(t; \boldsymbol{x}_j)}{V(t; \boldsymbol{z})} \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

si ha

$$D(t; \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} p_j \, D(t; \boldsymbol{x}_j)$$

Le quantità p_j sono interpretabili come dei pesi che esprimono il valore attuale del flusso $\alpha_j \, \boldsymbol{x}_j$ (cioè del contributo fornito dal flusso $\boldsymbol{x}_j$ alla formazione del flusso di portafoglio $\boldsymbol{z}$) espresso in percentuale del valore attuale dell'intero portafoglio.

Rendite a rate costanti

$t = 0$, rendita $\boldsymbol{r}$ (immediata)posticipata di durata m anni, con rate annue costanti R.
$x_k = R$ e $t_k = k$, per $k = 1, 2, \ldots, m$.

$$D(0; \boldsymbol{r}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} k\,(1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k}}$$

indipendente dal valore della rata R. Il denominatore è il valore attuale $a_{\overline{m}|i}$ di una rendita con rate unitarie. Il numeratore, che si indicherà col simbolo $d_{\overline{m}|i}$, viene a volte indicato come *dollar duration* della rendita unitaria $\boldsymbol{r}$.

Moltiplicando e dividendo per $(1 - v)$ si ottiene:

$$d_{\overline{m}|i} = \sum_{k=1}^{m} k\,v^k = \frac{1}{1-v}\sum_{k=1}^{m}(1-v)\,k\,v^k = \frac{1}{1-v}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(k\,v^k - k\,v^{k+1}\right)\right] .$$

Sviluppando le sommatorie e cancellando i termini di segno opposto si ottiene:

$$\begin{aligned} d_{\overline{m}|i} &= \frac{1}{1-v}\left[v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + mv^m\right] + \\ &\quad -\frac{1}{1-v}\left[v^2 + 2v^3 + \cdots + (m-1)v^m + m\,v^{m+1}\right] \\ &= \frac{1}{1-v}\left(\sum_{k=1}^{m} v^k - m\,v^{m+1}\right). \end{aligned}$$

Utilizzando ancora l'espressione della somma di m termini in progressione geometrica con ragione v si può anche scrivere:

$$d_{\overline{m}|i} = \frac{1}{1-v}\left(v\frac{1-v^m}{1-v} - m\,v^{m+1}\right) = \frac{v}{1-v}\left(\frac{1-v^m}{1-v} - m\,v^m\right)$$

Risulta quindi:

$$D(0;\boldsymbol{r}) = \frac{d_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} = \frac{(1-v^m)/(1-v) - m\,v^m}{1-v^m} = \frac{1}{1-v} - \frac{m\,v^m}{1-v^m}\,,$$

o anche, in termini di tasso:

$$D(0;\boldsymbol{r}) = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1}\,.$$

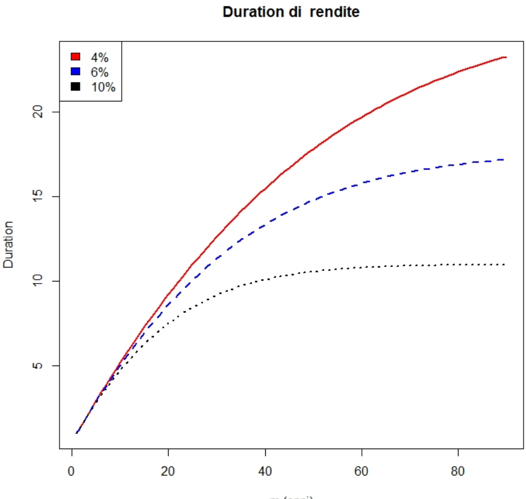
Si deduce che la duration della rendita $\boldsymbol{r}$ è una funzione decrescente del tasso di valutazione e è funzione crescente del numero di rate (cioè della maturity del flusso $\boldsymbol{r}$). Risulta forse meno evidente il fatto che la duration non cresce illimitatamente al crescere della durata. Dato che è:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{(1+i)^m - 1} = 0\,,$$

si ricava che il grafico della $D(0;\boldsymbol{r})$ in funzione di m presenta un asintoto orizzontale al livello $(1+i)/i$. Questo valore può essere interpretato come la duration di una rendita perpetua posticipata.

Andamento della Duration di una rendita

In figura é riportato il comportamento della duration di una rendita al variare del numero di rate e del tasso di interesse



Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso x, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,,\;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\; k = 1, 2, \ldots, m$.

Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso $\boldsymbol{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,,\ \ x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\ k = 1, 2, \ldots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, è espressa dalla:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^{m} k\,(1+i)^{-k} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} + C\,(1+i)^{-m}}\,,$$

Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza m, che garantisce il flusso $\boldsymbol{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,, \;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\; k = 1, 2, \ldots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, è espressa dalla:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^{m} k\,(1+i)^{-k} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} + C\,(1+i)^{-m}}\,,$$

che, ha la forma esplicita:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I\, a_{\overline{m}|i} + C\,(1+i)^{-m}}$$

Titoli a cedola fissa

Si consideri uno straight bond con scadenza *m*, che garantisce il flusso $\boldsymbol{x}$, con i pagamenti:

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = I\,, \;\; x_m = C + I\,,$$

esigibili alle date $t_k = k,\; k = 1, 2, \ldots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, è espressa dalla:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^{m} k\,(1+i)^{-k} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} + C\,(1+i)^{-m}}\,,$$

che, ha la forma esplicita:

$$D(0; \boldsymbol{x}) = \frac{I\,d_{\overline{m}|i} + m\,C\,(1+i)^{-m}}{I\,a_{\overline{m}|i} + C\,(1+i)^{-m}}$$

Evidentemente il titolo a cedola fissa $\boldsymbol{x}$ è equivalente a un portafoglio composto da una rendita $\boldsymbol{I}$ posticipata con *m* rate annue *I* e da uno ZCB unitario con maturity *m* e valore facciale *C*.

$$D(0;\boldsymbol{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\, C\, v^m}{I\, a_{\overline{m}|i} + C\, v^m}$$

Tenuto conto che:

$$V(0;\boldsymbol{x}) = V(0;\boldsymbol{I}) + C\, v(0,m) = I\, a_{\overline{m}|i} + C\, v^m$$

Si può scrivere:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\, C\, v^m}{V(0;\boldsymbol{x})} = \frac{I\, d_{\overline{m}|i}}{V(0;\boldsymbol{x})} + \frac{m\, C\, v^m}{V(0;\boldsymbol{x})}$$

$$D(0;\boldsymbol{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i} + m\, C\, v^m}{V(0;\boldsymbol{x})} = \frac{I\, d_{\overline{m}|i}}{V(0;\boldsymbol{x})} + \frac{m\, C\, v^m}{V(0;\boldsymbol{x})}$$

si può scrivere:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = \frac{I\, d_{\overline{m}|i}}{V(0;\boldsymbol{I})}\, \frac{V(0;\boldsymbol{I})}{V(0;\boldsymbol{x})} + \frac{m\, C\, v(0,m)}{C\, v(0,m)}\, \frac{C\, v(0,m)}{V(0;\boldsymbol{x})}\,,$$

cioè:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = D(0;\boldsymbol{I})\, \frac{V(0;\boldsymbol{I})}{V(0;\boldsymbol{x})} + m\, \frac{C\, v(0,m)}{V(0;\boldsymbol{x})}$$

Quindi la duration del titolo a cedola fissa può essere ricavata come media pesata della duration $D(0;\boldsymbol{I})$ del flusso cedolare $\boldsymbol{I}$, e della duration m dello ZCB che corrisponde al rimborso del valore nominale C. Come pesi vanno utilizzati i valori attuali percentuali di $\boldsymbol{I}$ e dello ZCB, calcolati col tasso di valutazione i.

Andamento della Duration

In figura é riportato il comportamento della duration di un TCF al variare del il tasso cedolare e della maturity m e della relazione tra il tasso cedolare e il tasso di interesse.