

Esercizio: trovare le coordinate del ricevitore GPS e i parametri statistici della soluzione

Dati:

coordinate approssimate ECEF del ricevitore

$X_{ro}$	$Y_{ro}$	$Z_{ro}$
4027881.6287	306998.5366	4919498.9839

coordinate ECEF dei satelliti

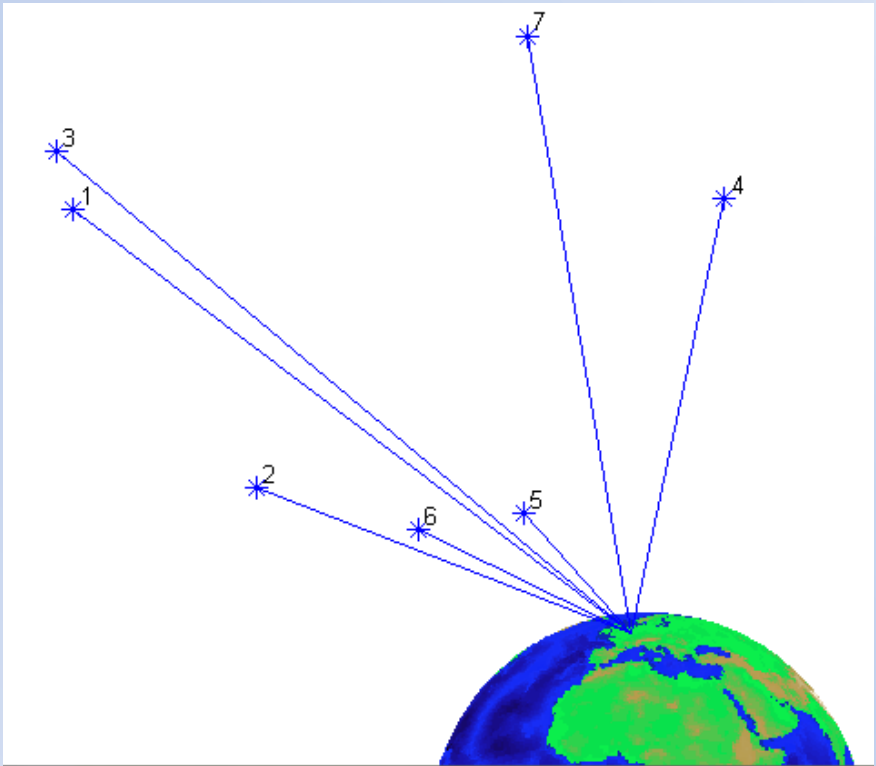
Sat#	X	Y	Z
1	16541441.633	-13885035.491	15345379.494
2	25410549.131	-6727934.585	4408210.528
3	5317955.106	-16589140.444	19981226.707
4	22215896.157	6629109.187	13302799.251
5	26704708.591	1495493.891	2977008.190
6	26376724.871	-1695901.905	2682409.093
7	17663598.373	-130481.852	19650397.729

Misure pseudorange:

Sat#	Pseudorange
1	21603328.219
2	22516039.907
3	22671596.331
4	21001295.975
5	22790921.793
6	22549697.956
7	20077978.182

Dati calcolati:

Sat#	Pseudorange approx
1	21603286.746
2	22515998.078
3	22671555.834
4	21001254.223
5	22790881.351
6	22549655.776
7	20077936.599



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{X_1 - X_{ro}}{\rho_{1o}} & -\frac{Y_1 - Y_{ro}}{\rho_{1o}} & -\frac{Z_1 - Z_{ro}}{\rho_{1o}} & 1 \\ -\frac{X_2 - X_{ro}}{\rho_{2o}} & -\frac{Y_2 - Y_{ro}}{\rho_{2o}} & -\frac{Z_z - Z_{ro}}{\rho_{zo}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X_m - X_{ro}}{\rho_{mo}} & -\frac{Y_m - Y_{ro}}{\rho_{mo}} & -\frac{Z_m - Z_{ro}}{\rho_{mo}} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -0.579243341601 & 0.656938649872 & -0.482606217856 & 1 \\ -0.949665541301 & 0.312441540355 & 0.0227077855448 & 1 \\ -0.056902732501 & 0.745257145241 & -0.664344689525 & 1 \\ -0.866044205530 & -0.30103490885 & -0.399180933561 & 1 \\ -0.994995613060 & -0.052147845267 & 0.0852310519914 & 1 \\ -0.99109465191 & 0.0888217745493 & 0.0992072745150 & 1 \\ -0.679139346692 & 0.0217891109563 & -0.733685888114 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \rho_1 - \rho_{1o} \\ \rho_2 - \rho_{2o} \\ \vdots \\ \rho_i - \rho_{io} \\ \vdots \\ \rho_m - \rho_{mo} \end{bmatrix} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} 41.472999 \\ 41.829016 \\ 40.495449 \\ 41.752032 \\ 40.441878 \\ 42.180275 \\ 41.582769 \end{bmatrix}$$

Caso 1: Pesi Uguali

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vettore termini noti normalizzati

$$u = A^T P b = \begin{bmatrix} -212.494575 \\ 60.4686637 \\ -85.5120323 \\ 289.754422 \end{bmatrix}$$

Matrice normale

$$N = A^T P A = \begin{bmatrix} 4.4241731073 & -0.50988168386 & 0.9566396321 & -5.117085432 \\ -0.5098816838 & 1.1863018054 & -0.6965072652 & 1.4720654668 \\ 0.95663963218 & -0.6965072652 & 1.3895250872 & -2.072671617 \\ -5.1170854326 & 1.4720654668 & -2.072671617 & 7 \end{bmatrix}$$

$$Q_s = N^{-1} = \begin{bmatrix} 10.0165351 & -4.80517240 & 5.59659758 & 9.98984331 \\ -4.80517240 & 3.57230478 & -2.25912469 & -4.93279540 \\ 5.59659758 & -2.25912469 & 4.55899906 & 5.91616505 \\ 9.98984331 & -4.93279540 & 5.91616505 & 10.2346495 \end{bmatrix}$$

$$GDOP = \sqrt{\text{trace}(Q_s)} = 5.3275$$

$$PDOP = 4.26$$

Vettore soluzione

$$S = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ c\Delta\tau \end{bmatrix} = N^{-1} u = \begin{bmatrix} -2.99689 \text{ m} \\ 0.96862 \text{ m} \\ -1.46716 \text{ m} \\ 38.56461 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\text{Vettore residui} \quad \begin{vmatrix} 0.17193 \\ -0.14905 \\ -0.063727 \\ -0.29791 \\ 0.92906 \\ -0.70499 \\ 0.11469 \end{vmatrix} \quad \sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{m-4} = 0.506$$

$$v = A * S - b =$$

$$C_S = \sigma_0^2 * N^{-1} = \begin{vmatrix} 5.06802759 & -2.43125452 & 2.83168886 & 5.05452244 \\ -2.43125452 & 1.80746525 & -1.14304059 & -2.49582744 \\ 2.83168886 & -1.14304059 & 2.30669915 & 2.99337919 \\ 5.05452244 & -2.49582744 & 2.99337919 & 5.17838611 \end{vmatrix}$$

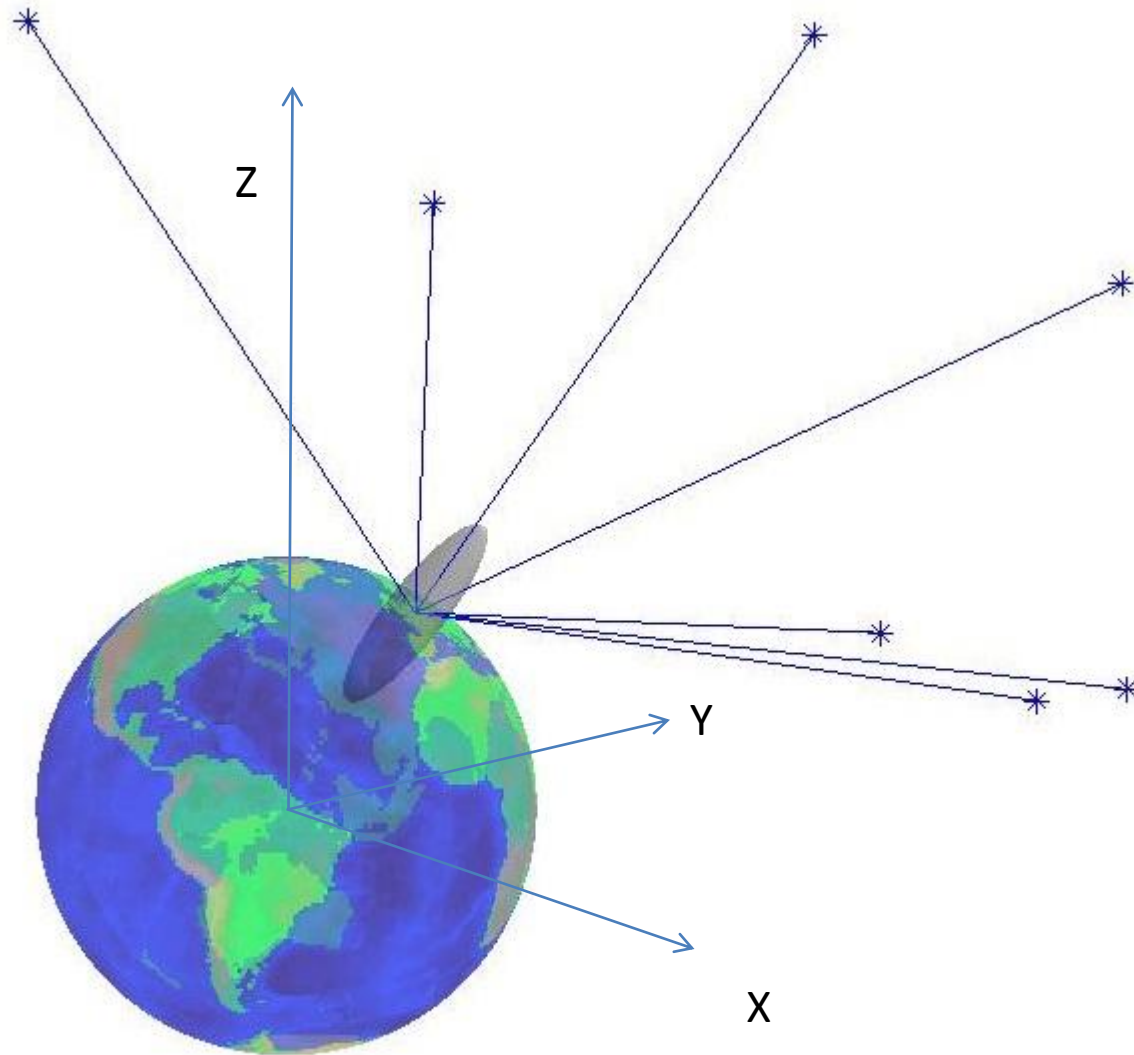
$$\begin{vmatrix} \sigma_{dX} \\ \sigma_{dY} \\ \sigma_{dZ} \\ \sigma_{c\Delta\tau} \end{vmatrix} = \text{sqrt}(\text{diag}(C_S)) = \begin{vmatrix} 2.25122 \text{ m} \\ 1.34442 \text{ m} \\ 1.51878 \text{ m} \\ 2.27561 \text{ m} \end{vmatrix} \quad C_{S3} = \begin{vmatrix} 5.06802759 & -2.43125452 & 2.83168886 \\ -2.43125452 & 1.80746525 & -1.14304059 \\ 2.83168886 & -1.14304059 & 2.30669915 \end{vmatrix}$$

Decomposizione in valori singolari di  $C_{S3}$

$$[U, \Lambda, V] = \text{svd}(C_{S3}) \quad U = V = \begin{vmatrix} -0.787272873 & 0.0651732397 & -0.613150773 \\ 0.396787134 & -0.707608294 & -0.584679801 \\ -0.471976050 & -0.703592886 & 0.531220912 \end{vmatrix} \quad \Lambda = \begin{vmatrix} 7.99100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.89483 & 0 \\ 0 & 0 & 0.29635 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\lambda_{\max}} = 2.827 \text{ m} & \tan \vartheta_a &= \frac{U(2,1)}{U(1,1)} \Rightarrow \vartheta_a = 153^\circ.25 & \cos \varphi_a &= U(3,1) \Rightarrow \varphi_a = 118^\circ.16 \\ b &= \sqrt{\lambda_{\text{med}}} = 0.946 \text{ m} & \tan \vartheta_b &= \frac{U(2,2)}{U(1,2)} \Rightarrow \vartheta_b = -84^\circ.74 & \cos \varphi_b &= U(3,2) \Rightarrow \varphi_b = 134^\circ.72 \\ c &= \sqrt{\lambda_{\min}} = 0.544 \text{ m} & \tan \vartheta_c &= \frac{U(2,3)}{U(1,3)} \Rightarrow \vartheta_c = -136^\circ.36 & \cos \varphi_c &= U(3,3) \Rightarrow \varphi_c = 57^\circ.91 \end{aligned}$$

Nella figura è rappresentato l'ellissoide d'errore (con semiassi scalati) centrato nel ricevitore



## Trattiamo ora il caso di pesi diversi

Poiché il peso sarà dato in funzione dell'angolo zenitale  $\zeta$  è necessario calcolarlo in funzione delle coordinate ECEF dei satelliti e del ricevitore

Nella figura è indicato con R il ricevitore ed S il satellite;

siano rispettivamente  $u_R$  il versore della normale all'ellissoide nel punto R ed  $u_S$  quello del vettore ricevitore R-satellite S.

L'angolo zenitale  $\zeta$  è l'angolo formato tra i due versori, che può essere calcolato sfruttando la proprietà del prodotto scalare tra due vettori conoscendo i rispettivi coseni direttori.

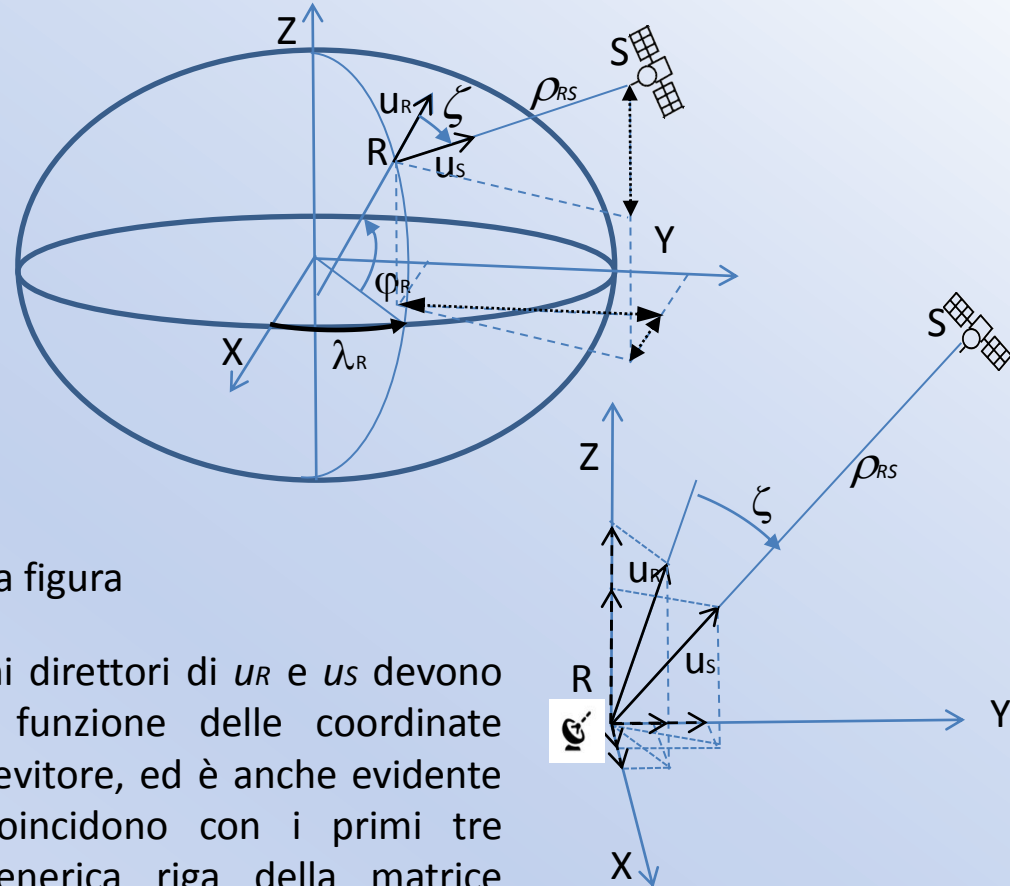
I coseni direttori di  $u_R$  e di  $u_S$  sono ricavabili dalla figura

$$\begin{cases} u_{Rx} = \cos(\varphi_R) \cos(\lambda_R) \\ u_{Ry} = \cos(\varphi_R) \sin(\lambda_R) \\ u_{Rz} = \sin(\varphi_R) \end{cases}$$

E' chiaro che i coseni direttori di  $u_R$  e  $u_S$  devono essere calcolati in funzione delle coordinate approssimate del ricevitore, ed è anche evidente che quelli di  $u_S$  coincidono con i primi tre coefficienti della generica riga della matrice disegno A cambiati di segno.

$$\begin{cases} u_{Sx} = \frac{X_S - X_R}{\rho_{RS}} \\ u_{Sy} = \frac{Y_S - Y_R}{\rho_{RS}} \\ u_{Sz} = \frac{Z_S - Z_R}{\rho_{RS}} \end{cases}$$

Le coordinate  $\varphi_R$  e  $\lambda_R$  non sono state fornite nei dati ma sono deducibili dalle coordinate ECEF  $X_{R0}$ ,  $Y_{R0}$ ,  $Z_{R0}$  approssimate del ricevitore.



Invero la trasformazione [XYZ]  $\Rightarrow$  [ $\varphi \lambda h$ ] richiede l'applicazione di un algoritmo iterativo noto dalla Geodesia, in ambiente Mapping Toolbox di MATLAB tale algoritmo è applicato nella funzione "ecef2geodetic" che necessita, oltre che delle coordinate ECEF del punto, anche dei parametri dell'ellissoide di riferimento:  $\varphi_R=50^\circ.798062$   $\lambda_R=4^\circ.358563$   $h=179.001m$

L'angolo zenitale  $\zeta$  sarà quindi calcolabile mediante la relazione:  $\zeta = \cos^{-1}(u_{Rx} * u_{Sx} + u_{Ry} * u_{Sy} + u_{Rz} * u_{Sz})$

Per i sette satelliti ricevuti si ha:

$\zeta =$ 

44.9696
55.5352
59.0106
29.5878
55.6997
57.0798
5.4280

La matrice dei pesi P è,  
nel secondo caso:

P=

0.50053	0	0	0	0	0	0
0	0.320243	0	0	0	0	0
0	0	0.26510	0	0	0	0
0	0	0	0.756203	0	0	0
0	0	0	0	0.317567	0	0
0	0	0	0	0	0.29536	0
0	0	0	0	0	0	0.991052

$N = A^T P A =$ 

2.0864143832	-0.1237679219	0.8423072670	-2.545814214
-0.1237679219	0.4667073770	-0.2114520012	0.4300679044
0.8423072670	-0.2114520012	0.8929360200	-1.383019750
-2.545814214	0.4300679044	-1.383019750	3.446057780

$u = A^T P b =$ 

-105.813931
17.6531761
-57.3544541
142.974460

$Q_s = N^{-1} =$ 

27.1203261	-11.5048039	13.0778792	26.7198433
-11.5048039	7.32806632	-5.26637876	-11.5274229
13.0778792	-5.26637876	9.29833581	14.0504125
26.7198433	-11.5274229	14.0504125	27.1073022

Vettore soluzione

$v = A * S - b =$ 

0.047303
-0.189539
-0.062405
-0.210507
1.000014
-0.673573
0.094977

GDOP= $\text{sqrt}(\text{trace}(Q_s))=8.4175$  PDOP=6.6141

$\sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{m - 4} = 0.1692$

$S = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ c\Delta\tau \end{bmatrix} = N^{-1} u = \begin{bmatrix} -2.62409 \text{ m} \\ 0.65538 \text{ m} \\ -1.24095 \text{ m} \\ 38.97089 \text{ m} \end{bmatrix}$



Quindi, nonostante il peggioramento degli indicatori globali di precisione GDOP (Geometric Dilution Of Precision) e PDOP (Precision Dilution Of Precision) si osserva una diminuzione dei residui e della varianza dell'unità di peso,  $\sigma_0^2$

La matrice di varianza–covarianza della soluzione

$$C_S = \sigma_0^2 * N^{-1} = \begin{vmatrix} 4.58956182 & -1.946953323 & 2.213164212 & 4.521788281 \\ -1.946953323 & 1.240125699 & -0.8912271475 & -1.950781119 \\ 2.213164212 & -0.8912271475 & 1.573553608 & 2.377745628 \\ 4.521788281 & -1.950781119 & 2.377745628 & 4.587357785 \end{vmatrix}$$

fornisce il vettore degli sqm delle componenti del vettore stato

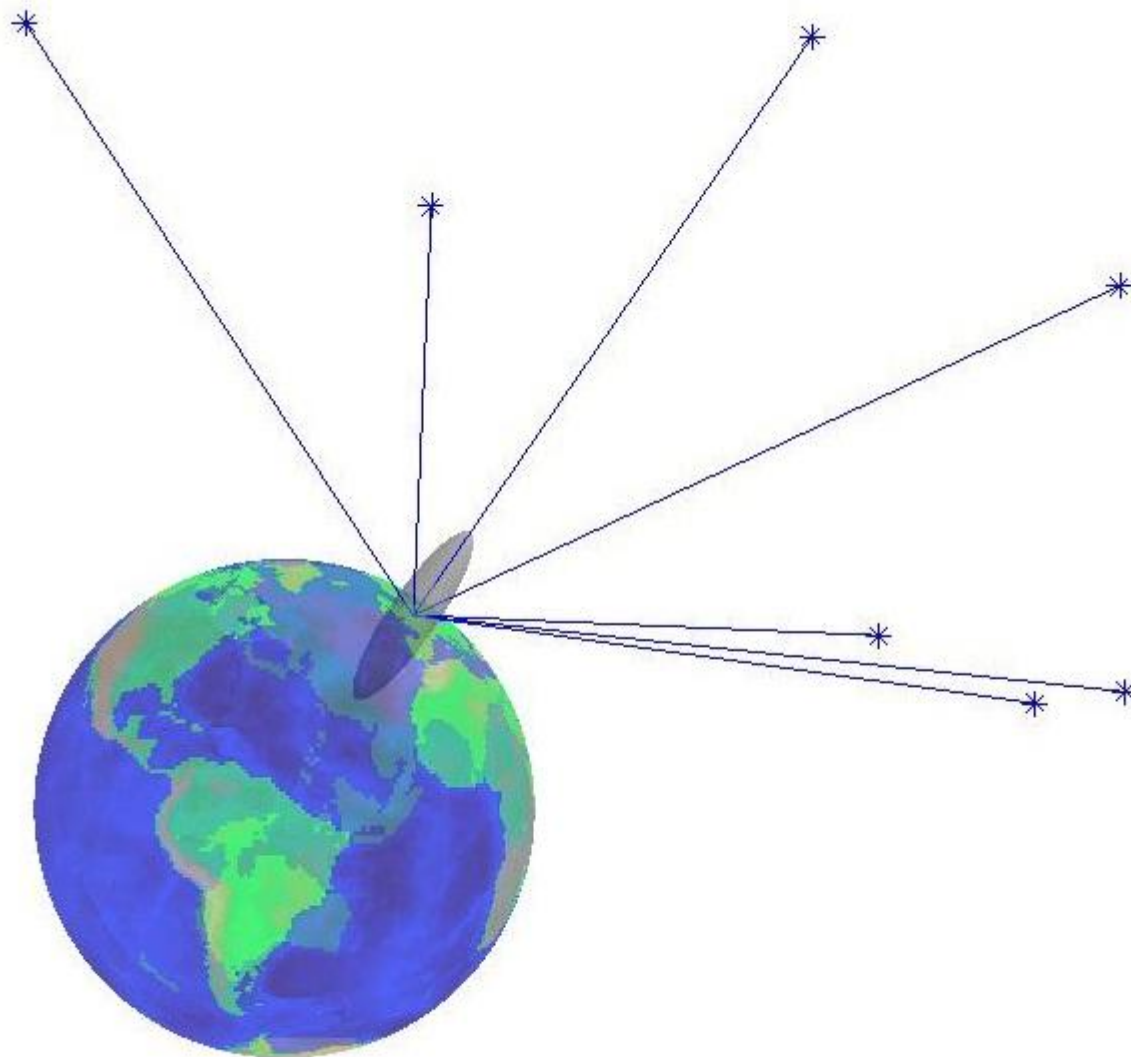
$$\begin{vmatrix} \sigma_{dX} \\ \sigma_{dY} \\ \sigma_{dZ} \\ \sigma_{c\Delta\tau} \end{vmatrix} = \text{sqrt}(\text{diag}(C_S)) = \begin{vmatrix} 2.14233 \text{ m} \\ 1.11361 \text{ m} \\ 1.25441 \text{ m} \\ 2.14181 \text{ m} \end{vmatrix}$$

che risulta inferiore rispetto a quello riscontrato nel caso di pesi uguali, così come i semiassi dell'ellissoide d'errore desunti dalla partizione 3X3 superiore sinistra della matrice Cs.

$$\begin{array}{lll} a = 2.5712 \text{ m} & \vartheta_a = 155^\circ.84 & \varphi_a = 115^\circ.33 \\ b = 0.714 \text{ m} & \vartheta_b = -80^\circ.00 & \varphi_b = 139^\circ.88 \\ c = 0.5315 \text{ m} & \vartheta_c = -129^\circ.24 & \varphi_c = 61^\circ.19 \end{array}$$

L'orientamento dei suddetti semiassi è poco diverso da quello riscontrato in precedenza. In definitiva si è verificato come l'introduzione dei pesi funzione dell'angolo zenitale ha prodotto un miglioramento della precisione di circa il 10%

Nella figura seguente è rappresentato l'ellissoide d'errore (con semiassi scalati) centrato nel ricevitore.





Che può essere confrontato con l'analogo ottenuto nella soluzione con pesi uguali nella figura seguente in cui compaiono contemporaneamente i due ellissoidi visti in trasparenza

