

Problema: determinare la posizione di un ricevitore GPS e i parametri statistici della soluzione

Il principio di funzionamento di un ricevitore satellitare GPS si basa sulla misura dell'intervallo di tempo che intercorre tra l'emissione di un codice da parte di satelliti orbitanti intorno alla terra e la relativa ricezione da parte del ricevitore.

Tale intervallo di tempo è però misurato con un orologio del ricevitore che non è sincronizzato con quello dei satelliti che emettono il segnale; per cui dalla misura di tale intervallo non si determina la distanza tra i satelliti e il ricevitore ma una pseudodistanza (pseudorange)

Ci poniamo nel sistema di riferimento ECEF (Earth-Centered Earth-Fixed), sistema 3D cartesiano con origine nel centro dell'ellissoide WGS84

L'equazione della generica "pseudorange" è :
$$\rho_i = \sqrt{(X_i - X_r)^2 + (Y_i - Y_r)^2 + (Z_i - Z_r)^2} + c\Delta\tau$$

in cui: X_i, Y_i, Z_i sono le coordinate (note) dell'i-simo satellite

X_r, Y_r, Z_r sono le coordinate (incognite) del ricevitore

$c\Delta\tau$ è l'effetto sulla distanza del difetto di sincronizzazione degli orologi (incognito)

ρ_i è la misura della "pseudorange" dall'i-simo satellite

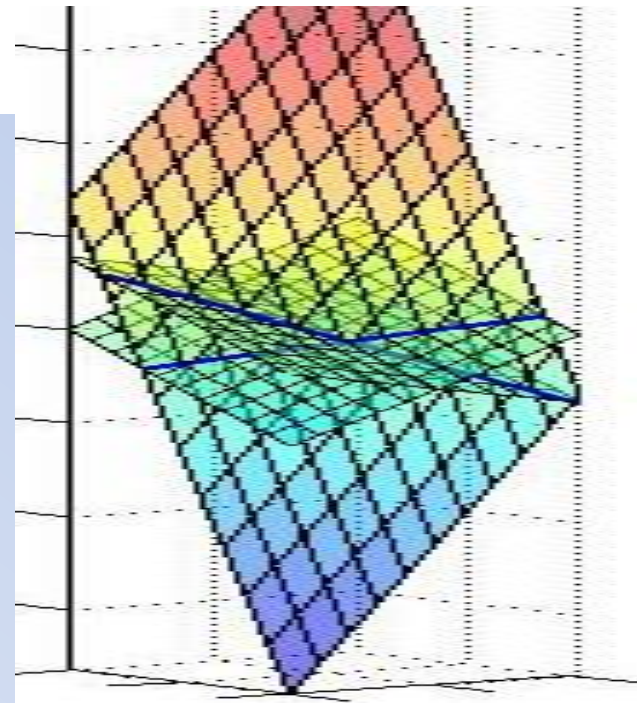
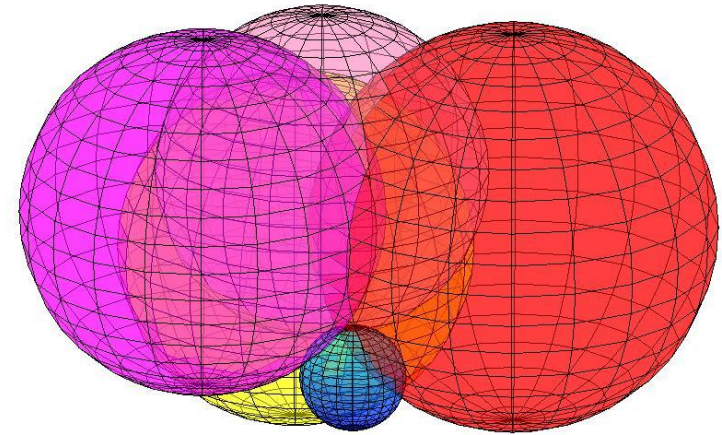
Quindi siamo di fronte ad un problema con quattro incognite che necessita di almeno quattro equazioni, quindi almeno quattro "pseudorange" misurate da altrettanti satelliti

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \sqrt{(X_1 - X_r)^2 + (Y_1 - Y_r)^2 + (Z_1 - Z_r)^2} + c\Delta\tau \\ \dots\dots\dots \\ \rho_i = \sqrt{(X_i - X_r)^2 + (Y_i - Y_r)^2 + (Z_i - Z_r)^2} + c\Delta\tau \\ \dots\dots\dots \\ \rho_m = \sqrt{(X_m - X_r)^2 + (Y_m - Y_r)^2 + (Z_m - Z_r)^2} + c\Delta\tau \end{array} \right.$$

Il luogo di posizione che si genera è una “pseudosfera” centrata nel satellite e avente raggio pari alla pseudorange misurata. L'intersezione di almeno quattro pseudosfere determinerà la posizione spaziale del ricevitore e il difetto di sincronismo del suo orologio.

Poiché la generica equazione delle misure non è lineare la soluzione del sistema potrà avvenire solo dopo la linearizzazione del luogo di posizione, mediante l'introduzione di una soluzione approssimata intorno alla quale sviluppare in serie di Taylor l'equazione risolvente, troncando tale sviluppo ai termini del primo ordine.

In termini geometrici ciò equivale a sostituire alla pseudosfera un piano, quindi la soluzione viene ricondotta all'intersezione di almeno quattro piani.



Mediante il processo di linearizzazione si costruisce la matrice disegno e si valutano le derivate parziali in corrispondenza dei valori stimati delle incognite

Nel caso in esame si pone

$$\begin{cases} X_r = X_{ro} + dX \\ Y_r = Y_{ro} + dY \\ Z_r = Z_{ro} + dZ \\ c\Delta\tau = 0 + c\Delta\tau \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial X_r}\right)_{(0)} = -\frac{X_i - X_{ro}}{\rho_{io}}$$

$$\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial Y_r}\right)_{(0)} = -\frac{Y_i - Y_{ro}}{\rho_{io}}$$

$$\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial Z_r}\right)_{(0)} = -\frac{Z_i - Z_{ro}}{\rho_{io}}$$

$$\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial c\Delta\tau}\right)_{(0)} = 1$$

con

$$\rho_{io} = \sqrt{(X_i - X_{ro})^2 + (Y_i - Y_{ro})^2 + (Z_i - Z_{ro})^2}$$

Il vettore dei termini noti sarà dato dalla differenza tra le pseudorange misurate e quelle stimate:

$$b = \begin{bmatrix} \rho_1 - \rho_{1o} \\ \rho_2 - \rho_{2o} \\ \vdots \\ \rho_i - \rho_{io} \\ \vdots \\ \rho_m - \rho_{mo} \end{bmatrix}$$

Il vettore delle incognite (vettore stato) sarà:

$$S = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ c\Delta\tau \end{bmatrix}$$

$$\rho_i = \sqrt{(X_i - X_r)^2 + (Y_i - Y_r)^2 + (Z_i - Z_r)^2} + c\Delta\tau$$

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial X_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial Y_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial Z_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial c\Delta\tau}\right)_{(0)} \\ \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial X_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial Y_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial Z_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial c\Delta\tau}\right)_{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial X_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial Y_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial Z_r}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial c\Delta\tau}\right)_{(0)} \end{bmatrix}$$

Per cui:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{X_1 - X_{ro}}{\rho_{1o}} & -\frac{Y_1 - Y_{ro}}{\rho_{1o}} & -\frac{Z_1 - Z_{ro}}{\rho_{1o}} & 1 \\ -\frac{X_2 - X_{ro}}{\rho_{2o}} & -\frac{Y_2 - Y_{ro}}{\rho_{2o}} & -\frac{Z_2 - Z_{ro}}{\rho_{2o}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X_m - X_{ro}}{\rho_{mo}} & -\frac{Y_m - Y_{ro}}{\rho_{mo}} & -\frac{Z_m - Z_{ro}}{\rho_{mo}} & 1 \end{bmatrix}$$

Per i pesi da attribuire alle osservazioni possono essere scelte due strategie:

- 1) Pesi uguali;
- 2) Pesi diversi.

I risultati saranno diversi sia in termini di stato che di precisione.

La strategia del peso diverso deriva dalla considerazione che lo spessore dello strato di atmosfera attraversato dal segnale proveniente dal satellite dipende dall'angolo zenitale ζ : ad angoli zenitali prossimi a 90 (satellite all'orizzonte) corrisponde spessore massimo. L'atmosfera è uno strato dispersivo che quindi introduce errori nella misura della pseudorange e tali errori crescono con ζ :

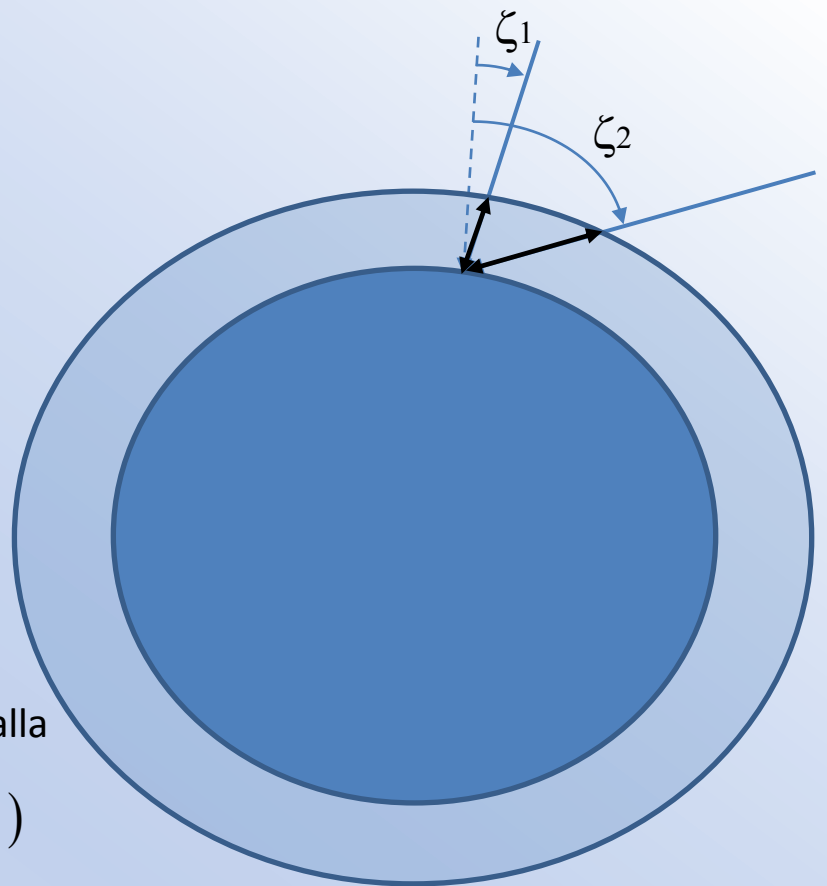
$\sigma \propto sec(\zeta)$ Poiché il peso è inversamente proporzionale alla varianza potrà porsi:

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i^2} = \cos^2(\zeta_i)$$

Nel caso di pesi uguali si utilizzerà una matrice P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & 1 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

con m= numero di satelliti



Nel caso di pesi diversi invece

$$P = \begin{bmatrix} \cos^2(\zeta_1) & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & \cos^2(\zeta_i) & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & \cos^2(\zeta_m) \end{bmatrix}_{m \times m}$$

La soluzione del vettore stato, in base al principio dei minimi quadrati, sarà:

$$S = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ c\Delta\tau \end{bmatrix} = [A^T P A]^{-1} A^T P b = N^{-1} u \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} N = [A^T P A] = \text{matrice normale} \\ u = A^T P b = \text{vettore termine noto normalizzato} \end{array}$$

Dalla matrice dei cofattori (inversa della normale) si traggono gli elementi relativi alla bontà geometrica della configurazione satellitare, elementi che sono indipendenti dalle misure ottenute, e quindi calcolabili ancor prima di osservare, nella fase di PLANNING:

$$Q_S = N^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ \cdot & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ \cdot & \text{simm.} & Q_{33} & Q_{34} \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_{44} \end{bmatrix}$$

$$GDOP = \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} + Q_{44}}$$

$$PDOP = \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}}$$

Dalle misure invece dipende il vettore dei residui che permette di calcolare la varianza dell'unità di peso stimata a-posteriori

$$v = A * S - b \Rightarrow \sigma_o^2 = \frac{v^T P v}{m - 4}$$

ed infine la matrice di varianza-covarianza del vettore stato da cui si traggono gli elementi relativi alla precisione delle singole componenti

$$C_S = \sigma_o^2 * Q_S = \begin{bmatrix} \sigma_{dX}^2 & \sigma_{dXdY} & \sigma_{dXdZ} & \sigma_{dXc\Delta\tau} \\ \cdot & \sigma_{dY}^2 & \sigma_{dYdZ} & \sigma_{dYc\Delta\tau} \\ \cdot & \text{simm.} & \sigma_{dZ}^2 & \sigma_{dZc\Delta\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{c\Delta\tau}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{dX} \\ \sigma_{dY} \\ \sigma_{dZ} \\ \sigma_{c\Delta\tau} \end{bmatrix} = \text{sqrt}(\text{diag}(C_S))$$

Inoltre, dalla partizione 3x3 superiore sinistra, vengono determinati i parametri dell'ellissoide d'errore

Invero si sottopone tale matrice alla decomposizione in valori singolari

$$C_{S3} = \begin{bmatrix} \sigma_{dX}^2 & \sigma_{dXdY} & \sigma_{dXdZ} \\ \sigma_{dXdY} & \sigma_{dY}^2 & \sigma_{dYdZ} \\ \sigma_{dXdZ} & \sigma_{dYdZ} & \sigma_{dZ}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow C_{S3} = U * \Lambda * V^T \quad \text{in cui}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\max} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{med} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\min} \end{bmatrix}$$

$$U = V = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_{\max X}) & \cos(\lambda_{medX}) & \cos(\lambda_{\min X}) \\ \cos(\lambda_{\max Y}) & \cos(\lambda_{medY}) & \cos(\lambda_{\min Y}) \\ \cos(\lambda_{\max Z}) & \cos(\lambda_{medZ}) & \cos(\lambda_{\min Z}) \end{bmatrix}$$

Si ottengono così i semiassi maggiore *a*, medio *b* e minore *c* dell'ellissoide d'errore e il rispettivo orientamento nel sistema di riferimento in cui si sta operando, nel nostro caso in quello ECEF

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\lambda_{\max}} \Rightarrow \tan \vartheta_a = \frac{\cos(\lambda_{\max Y})}{\cos(\lambda_{\max X})} & \cos \varphi_a &= \cos(\lambda_{\max Z}) \\ b &= \sqrt{\lambda_{med}} \Rightarrow \tan \vartheta_b = \frac{\cos(\lambda_{med Y})}{\cos(\lambda_{med X})} & \cos \varphi_b &= \cos(\lambda_{med Z}) \\ c &= \sqrt{\lambda_{\min}} \Rightarrow \tan \vartheta_c = \frac{\cos(\lambda_{\min Y})}{\cos(\lambda_{\min X})} & \cos \varphi_c &= \cos(\lambda_{\min Z}) \end{aligned}$$

Nel caso in cui tali orientamenti vengano richiesti in un sistema geodetico locale ENU con origine in un qualsiasi punto, bisognerà applicare una trasformazione dipendente dalle coordinate ellissoidiche (φ_A, λ_A) di detto punto

$$R = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_A & \cos \lambda_A & 0 \\ -\sin \varphi_A \cos \lambda_A & -\sin \varphi_A \sin \lambda_A & \cos \varphi_A \\ \cos \varphi_A \cos \lambda_A & \cos \varphi_A \sin \lambda_A & \sin \varphi_A \end{bmatrix}$$

